విషయసూచిక

పాఠం - 1

గణాంక శాస్త్రం - పరిధి, ప్రాముఖ్యం

ఈ పాఠం చదివిన తరువాత మనకు గణాంక శాస్త్రముపై నిర్దిష్టమైన పరిచయమేర్పడుతుంది. ఈ శాస్త్రానికి వివిధ నిర్వచనాలు, దాని ప్రాముఖ్యత ఇది ఉపయోగించలేని సందర్భాలు మొదలగు విషయములు అవగాహన అవుతాయి.

ముఖ్యాంశాలు :

1.1 గణాంక శాస్త్రం - అర్థం

1.2. గణాంక శాస్త్రం - నిర్వచనం

1.3 గణాంక శాస్త్ర విధులు

1.4 గణాంక శాస్త్ర ప్రాముఖ్యత

1.5 గణాంక శాస్త్ర పరిమితులు

1.1 గణాంక శాస్త్రం - అర్థం

పూర్వకాలంలో సక్రమ రాజ్య పరిపాలనకు అవసరమైన వివరాలు సేకరించడమే గణాంక శాస్త్ర పరమావధిగా ఉండేది. కానీ ఈ శాస్త్రానికి సంబంధించిన ఆధునిక భావన ప్రకారం రాజ్యాంగ నిర్వహణ కోసమే గాకుండా ఏ విషయానికి సంబంధించిన వివరాలు సేకరించినప్పటికీ, వాటిని కూడా గణాంక శాస్త్రం పరిధిలోకి తీసుకురావడం జరిగింది. గణాంకశాస్త్రం అనే పదాన్ని ఈనాడు రెండు అర్థాలతో వాడుతున్నారు. 1) గణాంక పద్ధతులు 2) సంఖ్యాదత్తాంశం

1.1.1 గణాంక పద్ధతులు : ఏకవచన భావనలో స్టాటిస్టిక్స్ అంటే దత్తాంశ సేకరణ, సమర్పణ, విశ్లేషణ, వివరణలకు సంబంధించిన గణాంక పద్ధతులు అని అర్థం. ఈ గణాంక పద్ధతులకు విశాలమైన పరిధి ఉంది. ఇవి శాస్త్రీయమైన పద్ధతులు అయినప్పటికీ ప్రయోగాత్మక పద్ధతులంత ఖచ్చితమైన ఫలితాలను ఇవ్వలేదు. కాని ఉజ్జాయింపుగా ఆ ఫలితాలను తెలియజేయగలదు. అందువల్ల గణాంకశాస్త్రం ఖచ్చితమైన ఫలితాలు చెప్పు శాస్త్రం కాదు.

1.1.2 సంఖ్యాదత్తాంశం : బహువచన భావనలో స్టాటిస్టిక్స్ అంటే సంఖ్యా దత్తాంశం లేదా గణాంకాలు అని అర్థం. గణాంకాలు అనగా ఒక విషయం మీద సేకరించిన సంఖ్యల వర్ణన. అయితే మనం సేకరించిన అంకెలన్ని గణాంకాలు కావు. సేకరించిన అంకెల గణాంకాలు కావాలంటే, అవి ఒకటి కంటే ఎక్కువగా ఉండి ఒక సహజవిషయాన్ని ఒకదానికొకటి సంబంధం కలిగి ఉండేలా వివరించాలి. దీనిని బట్టి గణాంకశాస్త్రంలో సంఖ్యాత్మక వివరాలేగాకుండా అనిశ్చిత పరిస్థితులలో సరైన నిర్ణయాలు తీసుకోవడానికి ఉపయోగించే గణాంక పద్ధతులు కూడా అంతర్భాగంగా ఉన్నాయని తెలుస్తుంది.

1.2 గణాంకశాస్త్రం - నిర్వచనాలు

గణాంక శాస్త్రాన్ని వివిధ గ్రంథకర్తలు వివిధ రకాలుగా నిర్వచించారు. అంతేగాక ఒకే గ్రంథకర్త వివిధ సమయాలలో పలురకాలుగా కూడా నిర్వచించడం జరిగింది. అందువలన ప్రస్తుతం వందకుపైగా నిర్వచనాలు ఉన్నాయి. అయితే చాలా నిర్వచనాలు గణాంకశాస్త్ర లక్షణాలను పూర్తిగా వెల్లడిచేయలేదు. అందువల్ల గణాంకశాస్త్ర సారాంశాన్ని గ్రహించాలన్నా, దాని పరిధిని సరిగా అంచనా వేయాలన్నా కొన్ని ముఖ్య నిర్వచనాలను పరిశీలించాలి.

1.2.1 సంఖ్యాదత్తాంశ అర్థంలో నిర్వచనాలు : కొందరు గణాంక శాస్త్రవేత్తలు ఈ శాస్త్రాన్ని సంఖ్యా దత్తాంశం అనే అర్థంలో నిర్వచించారు. ఈ అర్థంలో కొంతమంది ప్రముఖులు ఇచ్చిన నిర్వచనాలు కింద తెలుసుకొందాం.

ఎ.ఎల్.బౌలీ : "ఏ విచారణా విభాగంలోనైనా పరస్పర సంబంధం కలిగియుండునట్లు సంఖ్యాత్మకంగా చెప్పబడిన యదార్థాలే గణాంకాలు."

ఈ నిర్వచనం పరిశీలిస్తే, ఏదైనా ఒక విషయానికి సంబంధించి దత్తాంశ సేకరణ చేయడం, వాస్తవాన్ని అంకెలలో తెలియచెప్పడం, సంఖ్యాత్మకమైన యదార్థాలను పరస్పర సంబంధం ఉండేటట్లు ఏర్పాటు చేయడం అనే మూడు లక్షణాలు వెల్లడవుతున్నాయి. అయితే ఈ నిర్వచనం గణాంక శాస్త్ర ఇతర లక్షణాలను విస్మరించింది. అందువల్ల ఈ నిర్వచనం సంపూర్ణంగా లేదని భావించడం జరిగింది.

మూల్. కెండాల్ : "బహుకారణాల వల్ల గణనీయంగా ప్రభావితం కాబడే పరిమాణాత్మక దత్తాంశమే గణాంకాలు."

ఈ నిర్వచనం ప్రకారం గణాంకాలు పరిమాణాత్మక దత్తాంశాలు అన్నీ, అవి బహుకారణాలవల్ల ప్రభావితమై ఉండాలనీ తెలుస్తుంది. ఈ నిర్వచనం కూడా గణాంక శాస్త్ర ఇతర లక్షణాలను వెల్లడించలేదు. అందువలన ఈ నిర్వచనం కూడా సమగ్రమైంది కాదు.

వెబ్‌స్టర్ : "దేశ ప్రజల స్థితిగతులకు సంబంధించిన వర్గీకృతవాస్తవాలు, ముఖ్యంగా అంకెలలోను, పట్టీలలోను లేదా ఏ ఇతర వర్గీకృత రూపంలోనైనా తెలియజేయడానికి వీలైన వాస్తవాలే గణాంకాలు."

ఈ నిర్వచనం గణాంక శాస్త్రాన్ని ఒక దేశంలో నివసించే ప్రజల స్థితిగతులను అధ్యయనం చేయడానికి మాత్రమే పరిమితం చేస్తుంది. అంతేగాక పట్టీలతో, అంకెలలో లేదా వర్గీకృతమైన మరోరూపంలోగానీ తెలియజేస్తేనే గణాంకాలు అంటారనడం సమంజసం కాదు. అందువలన ఈ నిర్వచనం కూడా పరిపూర్ణమైంది కాదని చెప్పవచ్చు.

హోరేస్ సెక్రిస్ట్ : "ఒక పూర్వ నిర్ధారిత ఉద్దేశం కోసం ఒక క్రమ పద్ధతిలో సేకరించినవి, సముచిత ప్రామాణిక యదార్థత ప్రకారం అంచనా వేసినవి, లేదా లెక్కించినవి, సంఖ్యారూపంలో చెప్పబడి, అనేక కారణాలచే ప్రభావితమై పరస్పర సంబంధం ఉండేటట్లు అమర్చబడిన యదార్థాల సముదాయాలే గణాంకాలు."

ఈ నిర్వచనం సర్వసమగ్రమైందని చెప్పవచ్చు. దీనిలో గణాంకాలకు ఉండవలసిన లక్షణాలు అన్నీ చెప్పబడినాయి.

1.2.2 గణాంకాలకు ఉండవలసిన లక్షణాలు : సంఖ్యలు గణాంకాలు కావాలంటే వాటికి ఈ కింది లక్షణాలు అన్నీ ఉండాలి.

i) గణాంకాలు వాస్తవాల సముదాయాలై ఉండాలి : గణాంకాలు ఎల్లప్పుడూ సామూహిక సంఘటనలు, విషయాల గూర్చి తెలియజేస్తాయి. కాని వైయక్తిక సంఘటనలు, విషయాల గూర్చి తెలియజేయవు. సంఖ్యారూపంలో చెప్పినప్పటికీ ఏ ఒక్క సంఖ్య లేదా వేర్వేరు అంకెలు గణాంకాలు కాజాలవు. గణాంక శాస్త్రం ఒకే ఒక అంశాన్ని దృష్టిలో ఉంచుకొని నిర్ణయాలు చేయదు. అనేక అంశాలు సేకరించి, వాటిని సామూహికంగా అధ్యయనం చేసి, శాస్త్రీయ పద్ధతుల్లో ఒక నిర్ణయం చేస్తుంది.

ఉదాహరణకు, ఒక వ్యక్తి ఆదాయం రూ.25,000, ఒక సంస్థ అమ్మకాలు రూ.60,000 అనేవి సంఖ్యారూపంలో చెప్పినప్పటికీ అవి గణాంకాలు కావు. కాని ఒకే కాలంలో లేదా ఒకే ప్రదేశంలో గానీ ఉండే కొద్దిమంది వ్యక్తుల ఆదాయాలు, కొన్ని సంస్థల అమ్మకాలు గణాంకాలు అవుతాయి.

ii) గణాంకాలు సంఖ్యాత్మకంగా వెల్లడించబడి ఉండాలి : సేకరించిన వివరాలు అంకెల్లో చెప్పడానికి, వివరించడానికి, అంచనవేయడానికి, పోల్చడానికి వీలుగా ఉండాలి. ఆవిధంగా లేని దత్తాంశాన్ని గణాంక దత్తాంశం అనడానికి వీలులేదు. గుణాత్మక విషయాలైన అందచందాలు, తెలివితేటలు, నీతి, నిజాయితీలు ఈ పరిధిలోకి రావు. కానీ ఈ గుణాత్మక విషయాలు అంకెల్లో చెప్పగలిగితే గణాంకాలు అవుతాయి. ఉదాహరణకు, భారతదేశం చాలా పేదదేశం. 'ఆహార ధాన్యాల విషయంలో భారతదేశం స్వయం సంవృద్ధి సాధించింది' అనే వ్యాఖ్యలు గణాంకాలు కావు. కాగా "1950-51 సంవత్సరంలో పోల్చిచూస్తే ఆహారధాన్యాల ఉత్పత్తి 1987-88లో 50.8 మిలియన్ టన్నుల నుండి 138.4 మిలియన్ టన్నులకు పెరిగింది" అనే వ్యాఖ్య గణాంక వ్యాఖ్యగా పరిగణించబడుతుంది.

iii) గణాంకాలు బహుకారణాలవల్ల ప్రభావితం కావాలి : సేకరించిన దత్తాంశవిషయాలు అనేక కారణాల వల్ల ప్రభావితమై ఉండాలి. ఏదో ఒక కారణం విడగొట్టి దీని ప్రభావం ఈ విషయం మీద ఇంత ఉంది అని ఖచ్చితంగా చెప్పలేము. అంటే ఏ విషయ వివరణ అయినా ఒకే కారణం మీద ఆధారపడి ఉండరాదు.

ఉదాహరణకు, ఒక పొలంలో వరిపంట దిగుబడి పెరగడం లేదా తగ్గటం అనేది విత్తనాల నాణ్యత, ఎరువుల వినియోగం, భూసారం, వాతావరణం, వ్యవసాయ పద్ధతుల వంటి అనేక కారణాలపై ఆధారపడి ఉంటుంది. అందులో నిర్దిష్ట కారణ ప్రభావం ఇంత అని గణాంకాలు చెప్పలేవు.

iv) గణాంకాలు సముచిత ప్రామాణిక యదార్థత కలిగి ఉండాలి : అధ్యయనా క్షేత్రం విశాలంగా ఉన్నప్పుడు లేదా ప్రత్యక్ష పరిశీలన వీలుపడనప్పుడు గణాంకాలను అంచనా వేసి చెప్పడం తప్పనిసరి అవుతుంది. అంచనాలు లెక్కింపువలె యదార్థతను కలిగి ఉండవు. నూటికి నూరుపాళ్ళు యదార్థత రెంటిలోనూ అసాధ్యం అయినప్పటికి లెక్కింపు పద్ధతిలో ఖచ్చితత్వం ఎక్కువగా ఉంటుంది. కాబట్టి గణాంకాలను సముచితమైన ప్రామాణిక యదార్థత మేరకు సేకరించాలి లేదా అంచనా వేయాలి. అయితే ఈ ఖచ్చితత్వం ఎంత ఉండాలి అనేది దత్తాంశ స్వభావం. విచారణా ఉద్దేశం మీద ఆధారపడి ఉంటుంది.

ఉదాహరణకు, బొగ్గు బరువు తూచేటప్పుడు దగ్గర కిలోగ్రాముల్లోను, బంగారం తూచేటప్పుడు దగ్గర మిల్లీగ్రాములలోను, యదార్థత ఉండేలా తీసుకోవడం సబబుగా ఉంటుంది.

v) గణాంకాల తారతమ్య వివేచనకు అనువుగా ఉండాలి : తారతమ్య పరిశీలనకు, సాపేక్షిక అధ్యయనానికి వీలుకల్పించటం గణాంకశాస్త్ర ప్రధానధ్యేయం. కాబట్టి సేకరించిన అంకెలు పరస్పర సంబంధం కల్గి ఉండాలి. సేకరించిన గణాంకాలలో సజాతీయత ఉన్నప్పుడే పోల్చడానికి వీలవుతుంది. కాలానుగుణంగా లేదా స్థలానుగుణంగా ఏర్పాటు చేయబడిన గణాంకాలు పోల్చడానికి అనువుగా ఉంటాయి. ఒకే రకమైన సంఘటనలు వివిధ కాలాల్లో జరిగినప్పుడు కాలానుగుణంగా ఆ సంఘటనలను పోల్చవచ్చు. అయితే సంబంధంలేని రెండు విషయాలను పోల్చటం అవివేకం, అర్థరహితం, వృథాప్రయాస అవుతుంది.

ఉదాహరణకు, ఒక తరగతిలో బాలుర ఎత్తు సేకరించడం, మరో తరగతిలోని బాలుర ఎత్తుతో పోల్చడానికేగాని, ఒక జైలులోని నేరస్తుల సంఖ్యతో పోల్చడానికి కాదు.

vi) గణాంకాలు ఒక క్రమ పద్ధతిలో సేకరించాలి : గణాంకాలను జాగ్రత్తగా రూపొందించిన ఒక ప్రణాళిక ప్రకారం సేకరించాలి. హడావిడిగా అనాలోచితంగా సేకరించిన సంఖ్యాత్మక వివరాల వల్ల ప్రయోజనం శూన్యం. అంతేకాక అవసరమైన వివరాలు వదలిపెట్టడం, అనవసర వివరాలు సేకరించడం జరగవచ్చు. అలాంటి దత్తాంశం ఆధారంగా నిర్ణయాలు చేస్తే ప్రమాదకరమయిన తప్పుడు ఫలితాలు రావచ్చు. అందువలన గణాంక సేకరణ ఒక క్రమ పద్ధతిలో జరగాలి.

vii) గణాంకాలు పూర్వ నిర్ధారిత లక్ష్యం కోసం సేకరించాలి : గణాంక సేకరణకు ముందుగానే విచారణా ఉద్దేశ్యాన్ని, స్పష్టంగా నిర్ణయించుకోవాలి. పూర్వ నిర్ధారిత లక్ష్యాలు లేకుండా దత్తాంశ సేకరణ జరిపితే అది నిరుపయోగం అవుతుంది, ఆషామాషీగా సేకరించిన వివరాల ఆధారంగా నిర్ణయాలు చేస్తే అవి యథార్థతకు చాలా దూరంలో ఉంటాయి.

ఉదాహరణకు, ధరల ప్రవృత్తి తెలుసుకోవడానికి ఉద్దేశించిన విచారణలో టోకు ధరలు తీసుకోవాలో లేక చిల్లర ధరలు తీసుకోవాలో, ముందుగా నిర్ణయించుకొని వివరాలు సేకరించాలి.

ఎగువ వివరించిన ఈ లక్షణాలు లేని సంఖ్యాదత్తాంశాన్ని గణాంకాలు అనలేము. అందుకనే అనేకమంది గణాంక శాస్త్రవేత్తలు గణాంకాలు అన్నీ సంఖ్యాసత్యాలేగాని, సంఖ్యాసత్యాలు అన్నీ గణాంకాలు కాజాలవు అని చెప్పడం జరిగింది.

1.2.3 గణాంక పద్ధతుల భావనలో నిర్వచనాలు : కొందరు గణాంకశాస్త్రవేత్తలు ఈ శాస్త్రాన్ని గణాంక పద్ధతులు అనే అర్థంలో నిర్వచించారు. వీరి నిర్వచనాలలో కొన్ని దిగువ వివరించడం జరిగింది.

ఎ.ఎల్. బౌలీ : గణాంక శాస్త్రాన్ని గణాంక పద్ధతులు అనే అర్థంలో వివిధ సందర్భాలలో వివిధ రకాలుగా నిర్వచించాడు. "గణాంక శాస్త్రం అంకెలను సేకరించి లెక్కలు వ్రాసే శాస్త్రం" అని ఒక చోట నిర్వచించాడు. గణాంకశాస్త్రంలో వ్యక్తులకు, వస్తువులకు, సంబంధించిన వివరాలు సేకరించడం ఒక ముఖ్యమైన పని. అయితే వివరాల సేకరణకు లెక్కించడం ఒకటే పద్ధతి కాదు. విస్తృత పరిధి గల విచారణలలో లెక్కింపు ద్వారా వివరాల సేకరణ అసాధ్యమైనప్పుడు అంచనా పద్ధతిలో వివరాలు సేకరిస్తారు. అంతేగాక పెద్దపరిమాణంలోని దత్తాంశ

లక్షణాలను సులభంగా గ్రహించడానికి వర్గీకరణ, పట్టీకరణ, విశ్లేషణ, వివరణ వంటి ఇతర గణాంక పద్ధతులు వాడతారు. కాబట్టి ఈ నిర్వచనం సమగ్రమైంది కాదు. అలాగే మరో సందర్భంలో బౌలీ "గణాంక శాస్త్రం సగటులకు సంబంధించిన శాస్త్రం" అన్నాడు. పెద్ద పరిమాణంలోని దత్తాంశ లక్షణాలను ఏక విలువకు కుదించి చెప్పడంలో, వివిధ సమూహాలను పోల్చడంలో సగటులు తోడ్పడతాయి. కాని దత్తాంశంలోని అంశాల విస్తరణ ఏవిధంగా ఉందో ఇవి తెలియజేయవు. దానికోసం విస్తరణ కొలతలు అవసరం అవుతాయి. రెండు చలనరాశుల మధ్య సంబంధం తెలుసుకోవాలంటే సహసంబంధ గుణకం అవసరం. అయితే ఈ నిర్వచనం కూడా గణాంకశాస్త్ర పరిధిని పూర్తిగా సూచించలేదు.

బోడింగ్‌టన్ : "అంచనాలకు, సంభావ్యతలకు సంబంధించిన శాస్త్రమే గణాంక శాస్త్రం" అని నిర్వచించాడు. గణాంక శాస్త్రంలో పెద్ద పరిమాణంలోని దత్తాంశాన్ని సేకరించడంలో గల పరిమితులను అధిగమించడానికి అంచనాలను, సంభావ్యతలను ఉపయోగించుకోవటం జరుగుతుంది. తెలివైన వ్యాపారి భూత, వర్తమానకాలాల వ్యాపార ఫలితాలు ఆధారంగా చేసుకొని భవిష్యత్‌ను గూర్చి సరిఅయిన అంచనాలతో వ్యాపారం చేస్తాడు. అదే విధంగా రైల్వే కంపెనీలు వివిధ కాలాల్లో ప్రయాణీకుల రద్దీని అంచనావేయడం ద్వారా అదనపు భోగీలు, ప్రత్యేక రైళ్ళు ఏర్పాటు చేయడం ద్వారా ప్రయాణికులకు సౌకర్యాలు కల్పించగలవు. ప్రభుత్వాలు బడ్జెట్ తయారుచేయడంలో అంచనాలు సంభావ్యతల ఆధారంగా తీసుకొంటాయి. ఈ నిర్వచనం అంచనాలకు సంభావ్యతలకు ప్రాధాన్యతను ఇచ్చి వర్గీకరణ, విశ్లేషణ వంటి ఇతర గణాంక పద్ధతులు గూర్చి తెలియ చేయలేదు.

సెలిగ్మన్ : "ఏ విచారణలోనైనా సమస్య అవగాహనకు సంబంధించిన సంఖ్యా దత్తాంశాన్ని సేకరించడం, వర్గీకరించడం, సమర్పించడం, తారతమ్యత పోల్చడం, వివరించడానికి సంబంధించిన శాస్త్రీయ పద్ధతులను తెలిపేదే గణాంక శాస్త్రం." ఈ నిర్వచనం సులభంగాను, చిన్నదిగాను, చాలా వరకు విపులీకరణగాను ఉందని చెప్పవచ్చు.

ఒక సమస్య గురించి అధ్యయనం చేయడానికి సేకరించిన బృహత్ దత్తాంశాన్ని సులభంగా అర్థంచేసుకోవడానికి దానిని వర్గీకరించాలి. వర్గీకరించిన దత్తాంశాన్ని పట్టీలు, చిత్రపటాలు, రేఖాచిత్రాల, రూపంలో సమర్పించాలి. దత్తాంశపు పూర్తి లక్షణాలను తెలుసుకొనుటకు సగటు కొలతలు, విస్తరణ కొలతలు, వైషమ్యపు కొలతలు మొదలైన విశ్లేషణా పద్ధతులను ఉపయోగించాలి. విశ్లేషణా ఫలితాలను విపులీకరణ చేయాలి విపులీకరణ ప్రాతిపదికగా విధానాలు రూపొందించబడతాయి. ఈ గణాంక పద్ధతులన్నింటి ప్రాముఖ్యతను ఈ నిర్వచనం తెలియచేయడంవల్ల ఇది సర్వసమగ్రమైన నిర్వచనం అని చెప్పవచ్చు.

క్రాక్స్టన్, కౌడెన్‌లు : "గణాంక శాస్త్రాన్ని సంఖ్యా దత్తాంశ సేకరణ, సమర్పణ, విశ్లేషణ, విపులీకరణగా నిర్వచించవచ్చు" అని అన్నారు. ఈ నిర్వచనంలో క్రింద వివరించిన గణాంక పరిశోధనలోని నాలుగు దశలైన దత్తాంశ సేకరణ, దత్తాంశసమర్పణ, దత్తాంశ విశ్లేషణ, దత్తాంశ వివరణలు స్పష్టంగా ఉండడం వలన ఈ నిర్వచనం కూడా సమగ్రమైందని చెప్పవచ్చు.

1.2.4 గణాంక పద్ధతులు : ఏదైనా విచారణకు సంబంధించిన సంఖ్యాత్మక దత్తాంశాన్ని సేకరించి, వ్యవస్థీకరించి, సమర్పించి, విశ్లేషించి, వివరణ చేసే పద్ధతులనే గణాంక పద్ధతులు అంటారు.

i) సేకరణ : గణాంక విచారణలో దత్తాంశ సేకరణ మొదటి దశ. దత్తాంశ సేకరణకు ముందుగా పరిశోధనా ఉద్దేశ్యాన్ని, దత్తాంశ వనరులను, సేకరణ పద్ధతులను, అవసరమైన యదార్థతను గూర్చి ముందుగా ఒక ప్రణాళిక తయారు చేసుకొని, ఆ తరువాత ఒక పద్ధతి ప్రకారం దత్తాంశ సేకరణ జరుపుతారు. గణాంక విశ్లేషణకు ఇది పునాదివంటిది. కాబట్టి దత్తాంశ సేకరణలో అత్యంత జాగ్రత్త అవసరం. దత్తాంశం లోపభూయిష్టమైనదైతే ఫలితాలు విశ్వసనీయంగా ఉండవు. పరిశోధకుడు అనవసర వ్యయ ప్రయాసలకు లోను కాకుండా కావలసిన దత్తాంశాన్ని సిద్ధంగా ఉన్న ముద్రిత, అముద్రిత మూలాలనుండి సేకరించవచ్చు. అయితే వాటిని వినియోగించడంలో జాగ్రత్త వహించాలి.

ii) వ్యవస్థీకరణ : ముద్రిత వనరుల నుండి సేకరించిన దత్తాంశం సాధారణంగా వ్యవస్థీకరింపబడి ఉంటుంది. కానీ సర్వే ద్వారా సేకరించబడిన గత్తాంశం సాధారణంగా వ్యవస్థీకరించబడి ఉండదు. కాబట్టి ఆ దత్తాంశాన్ని ఎడిట్ చేయడం జరుగుతుంది. ఎడిటింగ్‌లో కొన్ని ముఖ్య విషయాలను ఆమోదించి గ్రహించవచ్చు లేదా పనికిరాని సందర్భరహితమైన విషయాలను తీసుకోకుండా నిరాకరించవచ్చు.

ఆ తరువాత కొన్ని సాధారణ లక్షణాలను దృష్టిలో ఉంచుకొని వాటిని వర్గీకరించాలి. వర్గీకృత దత్తాంశాన్ని స్పష్టంచేయడానికి ఆ వివరాలను పంక్తులలోను, దొంతులలోను అమర్చాలి.

iii) సమర్పణ : సేకరించి, వర్గీకరించిన దత్తాంశాన్ని తగినరీతిలో సమర్పించాలి. సమర్పించడానికి పట్టీలు, చిత్రపటాలు, రేఖాచిత్రాలు, ఉపయోగిస్తారు.

గణాంక విశ్లేషణకు వీలు కల్పించడమే సమర్పణ ముఖ్య ఉద్దేశ్యం. చిత్రపటాలు, రేఖాచిత్రాలు చదువరులకు ఆకర్షణీయంగా ఉంటాయి.

చిత్రపటాలు, రేఖాచిత్రాల ద్వారా గోచరించని అదనపు వివరాలను విశ్లేషణ ద్వారా తెలియజేయగలము.

iv) విశ్లేషణ : సంబంధిత చలవరాశుల మధ్య సంబంధాన్ని కలిగించడమే విశ్లేషణ ఉద్దేశ్యం దత్తాంశాన్ని విశ్లేషణ చేయడానికి గాను సగటు కొలతలను, విస్తరణ కొలతలను, వైషమ్యపు కొలతలను, సహసంబంధం, గణాంక నిర్ణయ సిద్ధాంతం వంటి గణాంక సూత్రాలు, పద్ధతులు ఉపయోగిస్తారు.

v) వివరణ : విశ్లేషించిన దత్తాంశాన్ని విపులీకరించి చెప్పడం. నిష్పక్షపాతంగా, హేతుబద్ధంగా నిర్ణయాలు తీసుకోవడం, వివరణగా చెప్పడం జరుగుతుంది. దత్తాంశాన్ని వివరించి చెప్పడానికి అత్యంత నైపుణ్యం, అనుభవం అవసరం. వివరణ సరిగా లేని యెడల తప్పుడు నిర్ణయాలు తీసుకోవడమే కాక గణాంక శోధన ప్రధానోద్దేశ్యాన్ని భంగపరిచినట్లు అవుతుంది.

కేవలం దత్తాంశ సేకరణగాని, గణాంక పద్ధతులుగాని, నిరుపయోగం అని వెల్లడి అవుతుంది. సముచిత నిర్ణయాలు తీసుకోవడానికి సేకరించిన దత్తాంశాన్ని తగిన విధంగా వ్యవస్థీకరించి, వర్గీకరించి, విశ్లేషించ వలసి ఉంటుంది. కాబట్టి గణాంక దత్తాంశం, గణాంక పద్ధతులు వలన విడివిడిగా ప్రయోజనం ఏమీలేదు. ఆ రెండూ ఒకదానికొకటి పూరకాలు.

1.3 గణాంక శాస్త్ర విధులు

ప్రతి శాస్త్రానికి ఉన్నట్లుగా గణాంక శాస్త్రానికి కూడా కొన్ని విధులున్నాయి నిత్యజీవితంలో మనం అనేక విషయాలకు సంబంధించిన వివరాలు సేకరిస్తాం. సేకరించిన వివరాలు పెద్ద పరిమాణంలో ఉంటే వాటిని యధాతధంగా గుర్తుంచుకోవడం మానవ మేధస్సుకి సాధ్యంకాదు. ఇలా పెద్ద పరిమాణంగా ఉన్న సంక్లిష్ట దత్తాంశాన్ని సంగ్రహపరచి, సులభంగా గ్రహించడానికి, ఎక్కువ కాలం గుర్తుంచుకోవడానికి, సరిపోల్చడానికి గణాంక పద్ధతులు వీలు కల్పిస్తాయి. ఈ దిగువ కొన్ని గణాంకశాస్త్ర విధులను వివరించడం జరిగింది.

1.3.1 సంక్షిప్తం చేయడం : గణాంక పద్ధతులు స్థూల దత్తాంశాన్ని సంగ్రహపరచి దానిని ఒక సంఖ్యలో వ్యక్తపరచడానికి అనువైన వాహకాలను సమకూరుస్తాయి. ఈవిధమైన ఏక సంఖ్యాదత్తాంశం మొత్తానికి ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది. సంక్షిప్తపరచబడిన ఈ సంఖ్యలు గ్రహించడానికి వీలుగాను, స్పష్టంగాను ఉంటాయి. సంఖ్యా దత్తాంశాలను సంక్షిప్తపరచుటకు సగటులు, నిష్పత్తులు, విచారణ గుణకాలు మొదలైన వాటిని వినియోగించవచ్చు. సంక్షిప్త పరచిన దత్తాంశాన్ని చిత్రపటాల్లో, రేఖాచిత్రాల్లో సమర్పించడం తేలికగా ఉంటుంది.

1.3.2 తారతమ్యాన్ని అధ్యయనం చేయడం : గణాంక శాస్త్రంలోని వివిధ గణాంక పద్ధతుల ద్వారా సంబంధిత అంశాలను పోల్చి, వాటిలోని సాపేక్షిక మార్పులను అధ్యయనం చేయడం సులభమవుతుంది. దత్తాంశాలను పోల్చడానికి గణాంకశాస్త్రంలో సగటులు, శాతాలు, నిష్పత్తులు, గుణకాలు, చిత్రపటాల వంటి వాటిని ఉపయోగిస్తారు. గతంలో జరిగిన సంఘటనలను విశ్లేషించటం వలన దాని అనుభవంతో భవిష్యత్‌లో వచ్చే మార్పులు తెలుసుకోవడానికి వీలవుతుంది.

1.3.3 బాంధవ్యాన్ని అధ్యయనం చేయడం : మనకు నిత్య జీవితంలో అనేక సహజ విషయాల మధ్య సంబంధం ఉన్నట్లు కన్పిస్తుంది. వాటిమధ్య ఉన్న బాంధవ్యాన్ని గణాంక పద్ధతుల ద్వారా అధ్యయనం చేయడానికి అవకాశం ఉంది. ఉదాహరణకు గోధుమల అమ్మకాలు, వర్షపాతం మధ్య గల సంబంధాన్ని, సహ సంబంధం ద్వారా అధ్యయనం చేస్తారు.

1.3.4 వ్యక్తిగత విజ్ఞానాన్ని పెంపొందించడం : "వ్యక్తి అనుభవాన్ని పెంపొందింపచేయడం గణాంకశాస్త్ర ప్రధమ విధి" అని బౌలీ చెప్పడం జరిగింది. గణాంకశాస్త్రం మానవుల విజ్ఞానాని పెంపొందించడానికి [illegible]

పరిష్కరించడానికి గణాంక పద్ధతులు అమూల్యమైన పరికరాలుగా ఉపయోగపడుతున్నాయి. గణాంక పద్ధతుల ద్వారా మానవులు హేతుబద్ధమైన ఆలోచనా విధానాన్ని పెంపొందించుకోవచ్చు. గణాంక పద్ధతులు వాడుకలో లేకుండా ఉంటే అనేక రంగాలలో ఆధునిక పరిజ్ఞానం మానవజాతికి అందుబాటులోకి వచ్చేది కాదు.

1.3.5 పరికల్పనను (Hypothesis) తయారు చేసి పరీక్షించడం : పరికల్పనను రూపొందించి పరిశీలించడానికే గాక క్రొత్త సిద్ధాంతాలు కనుగొనడానికి కూడా గణాంక పద్ధతులు ఉపకరిస్తాయి. అలాగే వివిధ విజ్ఞాన శాఖల యొక్క సిద్ధాంతాల ఖచ్చితత్వాన్ని పరిశీలించడానికి గణాంక పద్ధతులు ఉపయోగపడతాయి.

1.3.6 విధానాల పనితీరును నిర్ణయించడం : కొత్త విధానాలు రూపొందించడంలోను, ఆచరణలో ఉన్న విధానాల పనితీరును సమీక్షించడంలోను, గణాంక పద్ధతులు ఎంతో ఉపయోగపడతాయి. గణాంక విశ్లేషణ వల్ల విధానాల జయాపజయాలు వెల్లడి అవుతాయి. సాంఘిక, ఆర్థిక, వ్యాపార రంగాలలో తగిన విధానాలు రూపొందించడానికి గణాంక దత్తాంశం, గణాంక పద్ధతులు ఉపకరిస్తాయి.

1.3.7 జరుగబోయే దానిని గూర్చి చెప్పడం : గతంలో సేకరించిన వివిధ విషయాల ఆధారంగా భవిష్యత్‌లో జరగబోయే సంఘటనలను అంచనా వేయడానికి గణాంక పద్ధతులు ఉపయోగపడతాయి. ఆధునిక కాలంలో సంస్థల జయాపజయాలు అవి తయారు చేసే అంచనాల పైనే ఆధారపడి ఉంటాయి. భవిష్యత్ సంఘటనలు అంచనా వేయడానికి కాలశ్రేణులు, ప్రతిగమన విశ్లేషణ బహిర్వేశనం వంటి గణాంక పద్ధతులు చాలా ఉపయోగకరంగా ఉంటాయి. గత దత్తాంశపు తీరు తెన్నులను విశ్లేషణ చేసి అర్థం చేసుకోవడం వలన భవిష్యత్ సంఘటనలను ఊహించి తదనుకూలంగా నిర్ణయాలు తీసుకోవచ్చు.

1.4 గణాంకశాస్త్ర ప్రాముఖ్యత

నాడు రాజుల శాస్త్రంగా ప్రారంభమైన గణాంక శాస్త్రం నేడు సామాన్య మానవ శాస్త్రంగా అభివృద్ధి పొందింది. అనేక రంగాలలో ఏర్పడుతున్న సమస్యలను పరిష్కరించే శక్తి ఈ శాస్త్రానికి ఉండడం వలన ఈ శాస్త్రం దినదినాభివృద్ధి చెందుతుంది. ప్రపంచంలో వెలుగులోనికి వస్తున్న వివిధ శాస్త్రాల అభివృద్ధికి గణాంక శాస్త్రం ఉపయోగపడుతుంది. గణాంక శాస్త్రంలో దత్తాంశ సేకరణ, విశ్లేషణ, అనేవి కాల, ధన వ్యయాలతో కూడినవి అందుచేత త్వరగా ఫలితాలు తెలుసుకోవడానికి ఇటీవల కాలంలో కంప్యూటర్లు ఉపయోగిస్తున్నారు. దీని కారణంగా గణాంకశాస్త్ర ప్రాముఖ్యత ఇంకా విస్తృతమైంది. నేడు గణాంక శాస్త్రాన్ని అన్ని రంగాలలోనూ ఉపయోగిస్తున్నారు. ఇంచుమించు గణాంకశాస్త్రాన్ని ఉపయోగించని రంగం లేదంటే అతిశయోక్తి కాదు. వివిధ రంగాలలో గణాంక శాస్త్ర ప్రాముఖ్యత గూర్చి తెలుసుకొందాం.

1.4.1 వ్యాపార, పారిశ్రామిక రంగాలతో గణాంక శాస్త్ర ప్రాముఖ్యం : ఆధునిక వ్యాపార, పారిశ్రామిక సంస్థల సాఫల్యం ఉత్పత్తి, అమ్మకాలను సమర్థవంతంగా నిర్వహించడంపై ఆధారపడి ఉంటుంది. ఈ రెండూ సంస్థల స్థలనిర్ణయం, పరిమాణం, మార్కెటింగ్ నిర్ణయాలు, ఉత్పత్తి ప్రణాళిక, నాణ్యతా నియంత్రణ మొదలైన అనేక అంశాల మీద ఆధారపడి ఉంటాయి. ఈ విషయాలలో సరైన నిర్ణయాలు తీసుకోవడానికి గణాంక పద్ధతులు వ్యాపారస్తులకు, పారిశ్రామికవేత్తలకు ఎంతో ఉపయోగపడుతున్నాయి.

1. వ్యాపార స్థానం నిర్ణయించడం : ఔత్సాహికులైన పారిశ్రామికవేత్తలు పరిశ్రమలను ఏర్పాటు చేసేటప్పుడు అనేక అంశాలపై కీలకమైన నిర్ణయాలు చేయవలసి ఉంటుంది. వాటిలో అతిముఖ్యమైనది పరిశ్రమ స్థానాన్ని నిర్ణయించడం. ముడి పదార్థాలు, శ్రామికుల లభ్యత, రవాణా సదుపాయాలు, ప్రభుత్వం అందజేసే ప్రోత్సాహకాలు మొదలైన వివిధ అంశాలకు సంబంధించిన దత్తాంశాన్ని సేకరించి, వ్యవస్థీకరించి, విశ్లేషణ జరిపి నిర్ణయాలు చేస్తారు. వివిధ అంశాలకు సంబంధించిన గణాంకాల ఆధారంతో చేసిన నిర్ణయాలు సహేతుకంగా ఉండటమే కాకుండా సంస్థ వికాసానికి తోడ్పడతాయి. ఈ దత్తాంశ వివరాలు వ్యవస్థాపకులకు అందుబాటులో లేకపోతే సంస్థ స్థాపనకు సంబంధించిన నిర్ణయాలు చేయడం సాధ్యం కాదు. అంతేగాక పరిశ్రమ స్థాపనకు కావలసిన పెట్టుబడిని ప్రజల నుండే సేకరించడం కూడా చాలా కష్టం అవుతుంది.

2. సంస్థ పరిమాణం : ప్రారంభించబోయే సంస్థ పరిమాణాన్ని నిర్ణయించడం మరో జటిలమైన సమస్య. ఈ సమస్యను పరిష్కరించడానికి వివిధ గణాంక పద్ధతులు వ్యవస్థాపకులకు మార్గదర్శకాలుగా ఉంటాయి. ఈ పద్ధతుల ద్వారా ఊహించిన ఉత్పత్తి

స్థాయిల్లో సంస్థ యొక్క ఆదాయ, వ్యయాలను విశ్లేషణ చేసి సంస్థకు తగిన పరిమాణం నిర్ణయిస్తారు. సంస్థ పరిమాణ నిర్ణయంలో పొరపాట్లు జరిగితే సంస్థ మనుగడకే ముప్పు వాటిల్లుతుంది. సరైన పరిమాణం నిర్ణయించుకోవడం వలన సంస్థ అనేక రకాల ఆదాయాలు పొందుతుంది.

3. మార్కెటింగ్ నిర్ణయాలు : ఆధునిక కాలంలో వస్తువు తయారీకి ఎంత ప్రాముఖ్యత ఉందో తయారు అయిన వస్తువుకు మార్కెటింగ్ కలగచేయడానికి కూడా అంతే ప్రాముఖ్యత ఉంది. వస్తువు తయారు చేయబోయే ముందే మార్కెట్ పరిశోధన చేసి డిమాండ్‌ను అంచనా వేయవలసి ఉంటుంది. డిమాండ్‌ను అంచనా వేయడానికి తగిన సాధనాలను గణాంకశాస్త్రం మనకు అందిస్తుంది. అలాగే వినియోగదార్ల అభిరుచులు తెలుసుకోవడానికి వినియోగదార్లు సర్వే నిర్వహించి, వారి అభిరుచికి తగినట్లుగా వస్తువులను రూపకల్పన చేయటం ఇప్పుడు పరిపాటయింది. వ్యాపార చక్రాల కారణంగా డిమాండ్‌లో వచ్చే మార్పు తెలుసుకొనడానికి కాలశ్రేణులు విశ్లేషణలను విశేషంగా వినియోగిస్తున్నారు. తయారైన వస్తువులకు మార్కెట్ మందగించినప్పుడు వినియోగదార్లకు ప్రోత్సాహకాలు ఇచ్చి వాటియొక్క ప్రభావం ఎలా ఉంటుందో కూడా గణాంక పద్ధతుల ద్వారా విశ్లేషించవచ్చు. భవిష్యత్‌లో సంస్థయొక్క ఆర్థిక పరిస్థితులను అంచనా వేయడానికి ప్రతిగమన, బహిర్నివేశన పద్ధతులు అమూల్యమైనవి. సంస్థ ఉత్పత్తులకు సరియైన ధర నిర్ణయించడానికి దత్తాంశ విశ్లేషణ తప్పనిసరి. అందుబాటులో ఉన్న వివిధ గణాంక పద్ధతుల ద్వారా, ఉత్పత్తి వ్యయానికి సంబంధించిన దత్తాంశాన్ని విశ్లేషించి, నిర్ణయం చేసినట్లయితే వినియోగదార్లకు, సంస్థకు ప్రయోజనకారిగా ఉంటుంది. ధర నిర్ణయంలో పొరపాట్లు జరిగితే సంస్థ మార్కెట్ నుండి శాశ్వతంగా వైదొలగవలసిన ప్రమాదం ఏర్పడవచ్చు.

4. ఉత్పత్తి ప్రణాళిక : సమర్థవంతమైన వ్యాపార నిర్వహణకు ఉత్పత్తి ప్రణాళిక అద్దం పడుతుంది. ఉత్పత్తి ప్రణాళికలో లోటుపాట్లు జరిగితే సంస్థ వివిధ స్థాయిల్లో నష్టపోవలసి ఉంటుంది. ఖచ్చితమైన అమ్మకపు అంచనాలు ఉత్పత్తి ప్రణాళికను క్రమబద్ధం చేయడానికి తోడ్పడతాయి. అలాగే సరైన ఉత్పత్తి ప్రణాళిక ప్రకారం కావలసిన ముడి పదార్థాలను సకాలంలో సరైన ధరకు సేకరించి నిల్వ ఉంచుతుంది. అభిలషణీయమైన స్థాయిలో సరుకులను నిల్వ ఉంచడం వలన అధిక లేక అల్ప సరుకు నిల్వలవల్ల ఏర్పడే దుష్ఫలితాలు ఉండవు. ఉత్పత్తి ప్రణాళిక తయారీ లోనూ, సరుకు నిల్వల నియంత్రణలోనూ తగిన నిర్ణయాలు చేయడానికి గణాంకాల సహాయం తప్పనిసరిగా తీసుకోవాలి.

5. నాణ్యత నియంత్రణ : తయారైన వస్తువులకు నాణ్యతను కాపాడుకోవలసిన బాధ్యత ఉత్పత్తిదార్లపై ఉంటుంది. ఆధునిక వ్యాపార ప్రపంచంలో అనేక వ్యాపార సంస్థలు తీవ్రమైన పోటీని ఎదుర్కొనవలసి వస్తుంది. ఈ పోటీని సమర్థవంతంగా ఎదుర్కొనేందుకు గణాంక నాణ్యత నియంత్రణ విభాగాలను ఏర్పరచి తమ సంస్థ ఉత్పత్తుల గుణాన్ని నియంత్రించడం ద్వారా నిర్వాహకులు నాణ్యమైన వస్తువులను, సేవలను సముచితమైన ధరలను వినియోగదార్లకు అందించడానికి ప్రయత్నాలు చేస్తున్నారు.

6. సిబ్బంది పాలన : ఒక ఉద్యోగి ఒక వ్యాపార సంస్థకు ఎంతవరకు ఉపయోగపడేది అతను పనిచేయగల శక్తినిబట్టి, అతనికి ఆ పనిలో గల ఆసక్తిని బట్టి, అతని స్వభావాన్ని బట్టి ఆధారపడి ఉంటుంది. ఈ విషయాలను పరీక్షించడంలో గణాంక పద్ధతులు బాగా ఉపకరిస్తాయి. ఉద్యోగుల మానసిక ప్రవృత్తిని అధ్యయనం చేయడానికి గణాంక పద్ధతుల సహాయం తీసుకొంటారు. ఉద్యోగుల పనితీరును అధ్యయనం చేయడానికి వారి ఉత్పత్తి సంబంధించిన గణాంక వివరాలు సేకరించి విశ్లేషణ చేస్తారు. అసమర్థులుగా ఉన్నవారిని హెచ్చరించడం, వారు ప్రామాణిక ఉత్పత్తి స్థాయికి చేరుకోలేక పోవడానికి గల కారణాలను అధ్యయనం చేసి, నివారణ చర్యలు తీసుకోవడానికి, సమర్ధవంతులుగా పనిచేసేవారికి ప్రోత్సాహకాలు ఇవ్వడానికి, సంబంధించిన నిర్ణయాలను గణాంక పద్ధతుల ద్వారా చేయవచ్చు.

7. ఆడిటింగ్ : వ్యాపార సంస్థల ఆర్థిక పరిస్థితులను గూర్చి తెలుసుకోవడానికి లాభనష్టాల ఖాతా, ఆస్థి అప్పుల పట్టీలు తయారు చేస్తారు. అంశాల స్వభావాన్ని బట్టి వివిధ ఖర్చులను, ఆదాయాలను విభజించి ఒక క్రమ పద్ధతిలో అమరుస్తారు. సంస్థ కార్యకలాపాలను సరిదిద్ది లాభసాటిగా నిర్వహించడానికి గతంలోని అకౌంటింగ్ రికార్డులలోని సమాచారాన్ని సేకరించి, ఆడిటర్లు నివేదికలు తయారుచేసి, సలహాలు, సిఫార్సులు చేస్తారు. ఈ నివేదికలు చదువరులకు సులభంగా అర్థమవడానికి నిష్పత్తులను, సూచీ సంఖ్యలను కూడా వినియోగిస్తారు. సంస్థలు తయారుచేసిన అకౌంటింగ్ దత్తాంశపు విశ్వాసాన్ని కాపాడటానికి ఆడిట్ నిర్వహిస్తారు.

ఆడిటర్ అకౌంటింగ్ ఆ దత్తాంశాన్నంతటినీ లేదా ప్రతి వ్యాపార వ్యవహారాన్ని చూడటం సాధ్యం కాదు. కనుక ప్రతిచయన పద్ధతిని పాటించి యాదృచ్ఛిక పద్ధతిలో కొన్ని అంశాలను ఎంపిక చేసి వాటిని టెస్ట్ ఆడిట్ చేస్తారు. టెస్ట్ ఆడిట్ ఫలితాలనుబట్టి సంస్థ వ్యవహారాలపై విశ్వాసం ప్రకటిస్తారు.

8. క్రియాత్మక పరిశోధన : వ్యాపార సంస్థల లాభార్జన సామర్థ్యాన్ని పెంచడానికి క్రియాత్మక పరిశోధన పద్ధతులు అమూల్యమైనవిగా పరిగణింపబడుతున్నాయి. ఈ పద్ధతులన్నీ సంస్థల లాభాలను అధికం చేసి వ్యయాన్ని తగ్గించడానికి ఉద్దేశించబడినవి. వీటిలో ఆదా పూర్వకమైన ఆర్డరు పరిమాణాన్ని నిర్ణయించడం ఒకటి. ఇది కాక సరళాత్మక కార్యక్రమ పద్ధతి, క్రీడా సిద్ధాంతం, కార్యక్రమాన్ని నిలువగట్టి పున: పరిశీలన చేసే పద్ధతి మొదలైన క్రియాత్మక పరిశోధనలన్నీ గణాంక పద్ధతులపై ఆధారపడి చెప్పబడినవి.

1.5 గణాంకశాస్త్ర పరిమితులు

ప్రస్తుతం గణాంక శాస్త్రం అనేక రంగాలలో ఎన్నో రకాలుగా ఉపయోగపడుతుంది. అయినప్పటికి, ఈ శాస్త్రానికి కూడా కొన్ని పరిమితులు లేకపోలేదు. వీటిలో కొన్ని ముఖ్యమైన వాటిని గూర్చి ఈ దిగువ చర్చించడం జరిగింది.

1.5.1 గుణాత్మక విషయాలను గూర్చి పరిశీలించదు : ఈ శాస్త్రం గుణాత్మక విషయాలను గూర్చి నిర్దిష్టమైన నిర్ణయాలు తీసుకోవడానికి అంతగా తోడ్పడదు. ఉదాహరణకు నిజాయితీ, నాగరికత, సామర్థ్యం, తెలివితేటలు మొదలైన గుణాత్మక విషయాలను అంకెలతో వ్యక్తం చేయడానికి వీలుకాదు. కాబట్టి వీటిని అధ్యయనం చేయడానికి గణాంక పద్ధతుల అంతగా ఉపయోగపడకపోవచ్చు. కాని, కొన్ని గుణాత్మక విషయాలను పరోక్షంగా అంకెల రూపంలో పెట్టి దత్తాంశాన్ని గణాంక పద్ధతుల ద్వారా అధ్యయనం చేయవచ్చు. ఉదాహరణకు, విద్యార్థుల తెలివితేటలను పరీక్షలలో వారికి వచ్చిన మార్కులను బట్టి కొంత వరకు అంచనా వేయవచ్చు. కానీ ఈ అంచనాలు అంత నిర్దిష్టంగా, ఖచ్చితంగా ఉండకపోవచ్చు.

1.5.2 వ్యక్తిగత అంశాలను అధ్యయనం చేయదు : విశ్లేషణా సౌలభ్యం కోసం పూర్తి దత్తాంశాన్ని గుణాంక పద్ధతులు ఉపయోగించి ఒక అంకెగా సంక్షిప్తపరచడం జరుగుతుంది. ఒకే ఒక వ్యక్తిని గాని, అంశాన్నిగాని తీసుకొని ఫలితాలను నిర్ణయించదు. ఉదాహరణకు, వేయికి ఒకరు ఐ.ఏ.యస్.కు ఎంపిక అవుతున్నారని చెప్తే, ప్రతి వేయిలోను ఒకరు తప్పక ఎంపిక అవుతున్నారని కాదు. ఎన్నోవేలమంది విద్యార్థులు ప్రయత్నిస్తే వారిలో సగటున వేయికి ఒకరు ఎంపిక అవుతున్నారని అర్థం.

1.5.3 గణాంక సిద్ధాంతాలు పూర్తి నిజాలు కావు : గణాంకశాస్త్రంలోని సిద్ధాంతాలు, నియమాలు భౌతిక, రసాయనిక, గణిత శాస్త్రాలలోని సిద్ధాంతాలు, నియమాలంత ఖచ్చితంగా ఉండవు. గణాంక సిద్ధాంతాలు సుదీర్ఘ కాలంలో మాత్రమే యదార్థాలు అవుతాయి. ఉదాహరణకు, ఒక నాణెం ఎగురవేసినప్పుడు బొమ్మ లేదా బొరుసు పడే అవకాశాలు సమానంగా ఉంటాయని సంభావ్యతా సిద్ధాంతం చెబుతుంది. ఒక నాణేన్ని పదిసార్లు ఎగురవేస్తే బొమ్మ బొరుసు సమానంగా పడకపోవచ్చు. కానీ వేయిసార్లు ఈ ప్రయోగం చేస్తే బొమ్మ, బొరుసు సమానంగా పడే అవకాశాలు ఎక్కువగా ఉంటాయి. అంటే సంఖ్య పెరిగేకొద్దీ గణాంక సిద్ధాంతాల యధార్థత కూడా పెరుగుతుంది.

1.5.4 ఒక విషయానికి చెందిన పూర్తి సమాచారం ఇవ్వలేదు : ఒక సమస్యకు సంబంధించిన విషయాన్ని అధ్యయనం చేసేటప్పుడు అనేక ఇతర విషయాలను పరిగణనలోనికి తీసుకోవాలి. ఉదాహరణకు, చాలా సందర్భాలలో ఒక సమస్యను అధ్యయనం చేయడానికి మతం, సంస్కృతి వంటి విషయాలను అధ్యయనం చేయాలి. కానీ గణాంక శాస్త్రం అటువంటి విషయాలను అధ్యయనం చేయడానికి పనికిరాదు. కాబట్టి గణాంక శాస్త్రంలో ఒక సమస్యను గూర్చి పూర్తి సమాచారం పొందడం చాలా కష్టమవుతుంది.

1.5.5 సందర్భరహితంగా పరిశీలిస్తే, తప్పు నిర్ణయాలకు దారితీస్తాయి : ఒక విషయాన్ని గురించి నిర్ణయాలు చేసేటప్పుడు అది జరిగేటందుకు గల కారణాలను గూడా పరిశీలించాలి. అలా కానట్లయితే లోపభూయిష్టమైన నిర్ణయాలు తీసుకోబడతాయి. ఉదాహరణకు ఎ, బి అనే ఇరువురు వ్యాపారుల గత మూడు సంవత్సరాల సగటు లాభాలు రూ.7000 అని అంటె, దానిని బట్టి ఆ ఇరువురు సమాన సామర్థ్యం గల వారని అభిప్రాయపడతాము. కాని పూర్తి సమాచారం లేకుండా అలాంటి నిర్ణయానికి రాకూడదు. ఎందుకంటె వారి పెట్టుబడులలో, లాభాల ప్రవృత్తిలో లేదా అమ్మకాల టర్నోవర్‌లో భేదాలు ఉండవచ్చు. ఈ సమాచారం లేకపోతే తప్పుడు నిర్ణయాలు చేసే అవకాశం ఉంటుంది.

1.5.6 విషయ పరిశీలనకు ఇది ఒకటే పద్ధతి కాదు : ఒక విషయ పరిశీలనకు ఉపయోగపడే అనేక పద్ధతులలో గణాంక పద్ధతి ఒకటి. విషయాన్ని సంపూర్తిగా అధ్యయనం చేసుకొని, సరైన నిర్ణయాలు చేయడానికి గణాంక పద్ధతులకు, ఇతర పద్ధతులను జోడించాలి.

కాని గణాంకశాస్త్రంలో నిర్ణయాలను కేవలం గణాంక పద్ధతులను ఉపయోగించి చెప్పడం జరుగుతుంది. అందువల్లనే, ఉపయోగకరమైన నిర్ణయాలను తీసుకొనడానికి, గణాంక పద్ధతుల ద్వారా సాధించిన ఫలితాలను ఇతర సాక్ష్యాలతో ఋజువు చేయాల్సి ఉంటుంది.

1.5.7 దుర్వినియోగం చేసే అవకాశం ఉంది : నైపుణ్యం లేని వారుకూడా గణాంక పద్ధతులను ఉపయోగించడంవల్ల తప్పువాదనలకు గురి అవుతుంది. గణాంక శోధకులు గణాంక పద్ధతులను ఉపయోగించి ఒక సత్యాన్ని నిరూపించడంగాని, త్రోసిపుచ్చడంగాని చేయవచ్చు. నిపుణులు కాని వారి చేతిలో గణాంక పద్ధతులు దుర్వినియోగం చెంది నిందలకు గురి అవుతాయి. అందుకే "గణాంకాలు మట్టి ముద్దల లాంటివి. వాటి నుండి మనకు నచ్చిన విధంగా దైవాన్ని లేదా దయ్యాన్నిగాని చేయవచ్చు" అని డబ్ల్యు. ఐ. కింగ్ అన్నాడు. కాబట్టి గణాంక శాస్త్ర సూత్రాలను, పద్ధతులను ఉపయోగించి నిర్ణయాలు తీసుకోవడంలో అత్యంత జాగ్రత్త అవసరం. "గణాంక శాస్త్రం ఒక పనిముట్టు. ఇది అసంపూర్ణమైంది కావచ్చు. కాబట్టి దాని ఉపయోగం, లోపం తెలియని వాళ్ళ చేతిలో అది చాలా ప్రమాదకరంగా పరిణమిస్తుంది" అని ప్రఖ్యాత గణాంకశాస్త్రవేత్త బౌలీ ఒక సందర్భంలో వివరించడం జరిగింది.

అభ్యాసాలు

ఏ. ఈ క్రింది వానికి సంక్షిప్తంగా జవాబులు రాయండి

1. గణాంక శాస్త్ర అర్థాన్ని తెలియచేయండి.
2. గణాంక శాస్త్రం 'సగటులకు సంబంధించిన శాస్త్రం'' విశదీకరించండి.
3. గణాంక శాస్త్రం అంచనాలకు సంభావ్యతలకు సంబంధించిన శాస్త్రం వివరించండి.
4. గణాంక శాస్త్రం అనేది ఒక శాస్త్రీయ పద్ధతి వివరించండి.

బి. ఈ క్రింది వాటికి విపులంగా జవాబులు వ్రాయండి.

1. "అన్ని గణాంకాలు సంఖ్యాత్మక నివేదికలేగాని, సంఖ్యాత్మక విషయాలన్నీ గణాంకాలు కావు' వివరించండి.
2. 'సంఖ్యాదత్తాంశం, గణాంక పద్ధతులు అనేవి పరస్పర పూరకాలు'' మీరు అంగీకరిస్తారా?
3. గణాంకాలు ఏ విషయాన్నైనా ఋజువు చేయగలవు, వ్యాఖ్యానించండి.
4. సంఖ్యా దత్తాంశం అంటే ఏమిటి? వాటి లక్షణాలు వివరించండి.
5. గణాంకశాస్త్రానికి గల వివిధ నిర్వచనాలు సమీక్షించి వానిలో ఉత్తమమైన దానిని వివరించండి.
6. గణాంకశాస్త్ర విధులను, పరిమితులను గురించి వివరించండి.
7. వ్యాపార పారిశ్రామిక రంగాలలో గణాంకశాస్త్ర ప్రాముఖ్యతను గూర్చి చర్చించండి.
8. "సమర్థుడుకాని గణాంక శోధకుని చేతిలో గణాంక పద్ధతులు ప్రమాదకరమైన పనిముట్లు'', వ్యాఖ్యానించండి.
9. 'గణాంకాలు మట్టిముద్దలాంటివి, వాటి నుండి మీకు నచ్చిన విధంగా దైవాన్నిగాని, దయ్యాన్నిగాని తయారుచేయవచ్చు' విపులీకరించండి.
10. 'అబద్ధాలు మూడు రకాలు: సాధారణ అబద్ధాలు, పచ్చి అబద్ధాలు, గణాంకాలు' ఈ వ్యాఖ్య సరైనదేనా?

గణాంక విచారణలు - దత్తాంశ సేకరణ

1వ పాఠంలో ఏర్పడిన గణాంక పరిచయంలో దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులు లభ్యమయ్యే విధానాలు ఈ పాఠం ద్వారా మనకు తెలుస్తాయి.

ముఖ్యాంశాలు :

2.1 ఉపోద్ఘాతం

2.2. గణాంక విచారణ - రకాలు

2.3 ప్రాథమిక దత్తాంశం - సేకరించే పద్ధతులు

2.4 ద్వితీయ దత్తాంశం - సేకరించే పద్ధతులు

2.1 ఉపోద్ఘాతం

ఆధునిక కాలంలో గణాంక శాస్త్ర పద్ధతులను అన్ని దేశాలలో విరివిగా వాడుతున్నారు. గణాంక శాస్త్రం నిర్వహించే ముఖ్య విధుల వల్ల ఈ శాస్త్రానికి వివిధ రంగాలలో అధిక ప్రాముఖ్యత లభించింది. మానవ సమస్యలను అవగాహన చేసుకుని వాటికి పరిష్కార మార్గాలు సాధించడానికి గణాంకాలు ఎంతగానో ఉపయోగపడుతున్నాయి. విద్య, వైద్య, ఆర్థిక, వ్యవసాయం, పారిశ్రామిక, పరిశోధనా రంగాలలో గణాంక పద్ధతుల ఉపయోగం నిత్యం అభివృద్ధి చెందుతుంది. గణాంక శోధనలు లేదా విచారణలు అన్ని సమస్యల పరిష్కారానికి తప్పనిసరి అవుతున్నాయి.

2.2 గణాంక విచారణ - రకాలు

గణాంక పరిశోధన చేయడానికి ముందు గణాంక విచారణ నిర్వహించాలి. గణాంక విచారణ అంటే గణాంక పద్ధతుల ద్వారా ఒక విషయాన్ని అధ్యయనం చేయడానికి జరిపే పరిశోధన. గణాంక విచారణ విషయంలో గణాంక శోధకుడు కొన్ని ముఖ్యమైన విషయాలను గూర్చి ఆలోచించవలసి ఉంటుంది. విచారణ నిమిత్తం సేకరించిన వివరాలు పరిమాణాత్మకంగా వ్యక్తపరచడానికి అనువైనవా? కావా? అన్నది వీటిలో ప్రధానమైనది. పరిమాణాత్మకంగా వ్యక్తపరచలేని వివరాలను గణాంక విశ్లేషణ చేయడం కష్టం. కాబట్టి పరిశోధకుడు తప్పనిసరిగా పరిమాణాత్మక దత్తాంశాన్ని సేకరించాలి.

2.2.1 విచారణ నిర్వహించే పద్ధతి : అనేక సంస్థలు గణాంక విచారణలను నిర్వహిస్తుంటాయి. ప్రభుత్వ, ప్రైవేటు సంస్థలు దత్తాంశాన్ని సేకరిస్తాయి. అయితే ప్రభుత్వ సంస్థలకు గణాంక దత్తాంశాన్ని సేకరించడం సులభం. ప్రభుత్వం అవసరమైతే ప్రజల నుంచి వివరాలను శాసించి సేకరిస్తుంది. ప్రైవేటు సంస్థలు, వ్యక్తులు ప్రజలను శాసించలేవు. అందువల్ల వారు అనునయంగా ప్రజలకు నచ్చజెప్పి వివరాలు సేకరించాలి. విచారణ పద్ధతి నిర్వహించే ముందు విచారణకయ్యే ధన, కాల, వ్యయాలను గురించి శోధకుడు తీవ్రంగా ఆలోచించాలి.

2.2.2 గణాంక విచారణలో రకాలు : శోధకుడు దత్తాంశ సేకరణ కార్యక్రమాన్ని ప్రారంభించడానికి ముందుగా, ఏ రకమైన శోధన లేక విచారణ చేయాలో నిర్ణయించుకోవాలి. విచారణ రకాన్ని బట్టి దత్తాంశాన్ని వ్యవస్థీకరించే కార్యక్రమం ఆధారపడి ఉంటుంది. గణాంక విచారణలోని ప్రధాన రకాలను దిగువ వివరించడం జరిగింది.

ఎ) ప్రాథమిక పునర్విచారణలు : ఏదైనా ఒక సమస్యపై మొట్టమొదటిసారిగా విచారణ జరిపి గణాంక దత్తాంశాన్ని సేకరిస్తే దానిని ప్రాథమిక విచారణ అంటారు. ప్రాథమిక విచారణ పూర్తికాగానే మరల అదే అంశం పై విచారణలను నిర్వహిస్తే దానిని పునర్విచారణ అని అంటారు.

బి) క్రమ లేదా నిర్దిష్ట ప్రయోజన విచారణలు : క్రమ విచారణలో ఏదైనా ఒక సమస్యపై విచారణ క్రమంగా నియమిత అంతరాలలో నిర్వహించబడును. ప్రతి పది సంవత్సరాల కొకసారి నిర్వహించే జనాభా లెక్కల సేకరణ క్రమ విచారణ అవుతుంది. గణాంక వివరాలను ఒక నిర్దిష్ట ప్రయోజనం కోసం తాత్కాలికంగా సేకరించడాన్ని నిర్దిష్ట ప్రయోజన విచారణలంటారు.

సి) రహస్య, బహిరంగ విచారణలు : గణాంక విచారణ జరిగిన తరువాత విచారణ ఫలితాలను గోప్యంగా ఉంచితే వాటిని రహస్య విచారణ అంటారు. అలాగాక విచారణ ఫలితాలను బహిర్గతం చేస్తే దానిని బహిరంగ విచారణ అంటారు.

డి) ప్రత్యక్ష, పరోక్ష విచారణలు : గణాంక విచారణలో సేకరించే వివరాలు పరిమాణాత్మకంగా ఉండి సంఖ్యల రూపంలో వ్యక్తపరచడానికి వీలుగా ఉంటే అటువంటి విచారణలను ప్రత్యక్ష విచారణలు అంటారు. ఉదాహరణకు, విద్యార్థుల ఎత్తు సేకరిస్తే అది ప్రత్యక్ష విచారణ అవుతుంది. పరిమాణాత్మకంగా సేకరించడానికి వీలుగాని గణాంక వివరాలను పరోక్షంగా సేకరించి అధ్యయనం చేస్తారు. అలాంటి విచారణను పరోక్ష విచారణలు అంటారు. ఉదాహరణకు, నిజాయితీ, పేదరికం, తెలివితేటలు మొదలైన వాటిని పరోక్షంగా మాత్రమే సేకరించ వీలవుతుంది.

ఇ) పరిమిత, విస్తృత విచారణలు : ఒక సమస్యకు సంబంధించిన అనేక అంశాలపై విచారణ జరిపి, వివరాలు సేకరిస్తే దానిని విస్తృత విచారణ అంటారు. ఉదాహరణకు ఈ జనాభా లెక్కల్లో అక్షరాశ్యత, లింగబేధం, ఆర్థిక స్థోమత, వివాహ స్థితి మొదలైన అనేక వివరాలు సేకరించడం. విచారణలు ఏదో ఒక అంశానికి పరిమితమైనప్పుడు దానిని పరిమిత విచారణలంటారు. ఉదాహరణకు, ఒక కర్మాగారంలో పనిచేస్తున్న కార్మికుల ఆదాయాలకు సంబంధించిన వివరాలను మాత్రమే సేకరిస్తే అది పరిమిత విచారణ అవుతుంది.

2.2.3 గణాంక విచారణ ప్రణాళిక - దానిలోని అంశాలు : విచారణ సక్రమంగా నిర్వహించబడడానికి గణాంక శోధకుడు ఒక ప్రణాళికను తప్పనిసరిగా తయారు చేసుకోవాలి. దీనినే గణాంక విచారణ ప్రణాళిక అంటారు. ఈ ప్రణాళిక తయారీలో సాధారణంగా ఈ దిగువ అంశాలను తీసుకోవడం జరుగును.

i) విచారణ ఉద్దేశ్యం

ii) విచారణ పరిధి

iii) దత్తాంశ సేకరణ మూలాలు

iv) విచారణ పద్ధతి

v) గణాంక ప్రమాణం

vi) యధార్థత

i) విచారణ ఉద్దేశ్యం : గణాంక విచారణలో గణాంక విచారణ ఉద్దేశ్యాన్ని స్పష్టంగా నిర్వచించాలి. గణాంక విచారణ ఉద్దేశ్యాన్ని జాగ్రత్తగా నిర్ణయిస్తే విచారణ సమయంలో ఎదురయ్యే అనేక అడ్డంకులను, ఇబ్బందులను సులభంగా అధిగమించవచ్చు. విచారణ ఉద్దేశ్యం స్పష్టంగా ఉంటే వివరాల సేకరణలో ఏ అంశాలు ముఖ్యమైనవి, ఏవి కావు అనే విషయం నిర్ణయించడం తేలిక.

ఉదాహరణకు ఒక నగరంలో ఒక నిర్ణీత కాలంలో వస్తువుల చిల్లర ధరల పోకడలను అధ్యయనం చేయడం, విచారణ ఉద్దేశ్యం అనుకుందాం. ధరలు రెండు రకాలు (i) టోకు ధరలు (ii) చిల్లర ధరలు. ఈ రెండు ధరలలో ఏ ధరలకు సంబంధించిన వివరాలు సేకరించాలో స్పష్టంగా నిర్ణయించడం వలన చిల్లర ధరల వివరాలు సేకరించడం జరుగుతుంది. దాని వలన అనవసర వివరాల సేకరణను నివారించవచ్చు.

ii) విచారణ పరిధి : గణాంక విచారణ ఉద్దేశంతో పాటు విచారణ పరిధిని కూడా నిర్ణయించాలి. విచారణ పరిధి అంటే ఎంత పరిమాణంలో గణాంక దత్తాంశాన్ని సేకరించాలో నిర్ణయించడం. కావలసిన దానికంటే ఎక్కువ పరిమాణంలో దత్తాంశ సేకరణ చేస్తే నిర్వహణ కష్టమవుతుంది. అలాగే కావలసిన దానికన్నా తక్కువ పరిమాణంలో దత్తాంశ సేకరణ చేస్తే తుది నిర్ణయాలు తప్పుదోవ

పట్టించేవిగా ఉంటాయి. కొన్ని విచారణలలో గణాంక వివరాలను పూర్తిగా ప్రతి అంశాన్ని పరిశీలించి సేకరించవలసి ఉంటుంది. మరికొన్ని విచారణల్లో ప్రతిచయన పద్ధతిలో సేకరిస్తే సరిపోతుంది. గణాంక దత్తాంశ పరిమాణాన్ని నిర్ధయించడమే కాకుండా, గణాంక దత్తాంశాన్ని ఏ ప్రాంతాల నుండి సేకరించాలి? ఏ అంశాల నుండి సేకరించాలి? అనేది కూడా నిర్ణయించాలి.

iii) దత్తాంశ సేకరణ మూలాలు : గణాంక విచారణలలో గణాంక దత్తాంశాన్ని ముఖ్యంగా రెండు మూలాల నుంచి గ్రహించవచ్చు. అవి. a) ప్రాథమిక దత్తాంశము; b) ద్వితీయ దత్తాంశము.

a) ప్రాథమిక దత్తాంశం : ఏదైనా సమస్యపై మొట్ట మొదటిసారిగా విచారణ జరిపి, గణాంక దత్తాంశాన్ని సేకరిస్తే అలా సేకరించబడిన దత్తాంశాన్ని ప్రాథమిక దత్తాంశము అంటారు. ఉదాహరణకు ఒక వ్యాపారి సంస్థ తన సొంత పుస్తకాల నుండి వివరాలు సేకరిస్తే అది ప్రాథమిక దత్తాంశం అవుతుంది.

b) ద్వితీయ దత్తాంశం : ఒక సమస్య పై ఇదివరలో విచారణ జరిగి సేకరించబడిన దత్తాంశ వివరాలను ప్రస్తుత విచారణ అవసరాలకు వినియోగించుకుంటే అది ద్వితీయ దత్తాంశం అవుతుంది. ఉదాహరణకు ప్రభుత్వం సేకరించి ప్రచురించిన జనాభా లెక్కల వివరాల నుండి దత్తాంశం సేకరిస్తే అది ద్వితీయ దత్తాంశం అవుతుంది.

iv) విచారణ పద్ధతి : విచారణ పద్ధతులు రెండు రకాలు. అవి ఎ) జనాభా పద్ధతి; బి) ప్రతిచయన పద్ధతి. విచారణా సమస్యకు సంబంధించిన ప్రతి అంశాన్ని పరిగణనలోకి తీసుకొని దత్తాంశాన్ని సేకరిస్తే అది జనాభా విచారణ పద్ధతి అవుతుంది. జానాభాలోని కొన్ని అంశాలను మాత్రమే ఎన్నుకొని వాటినుండి మాత్రమే వివరాలను సేకరిస్తే దానిని ప్రతిచయన విచారణ అంటారు.

ఒక సమస్యపై విచారణ జరిపి గణాంక దత్తాంశాన్ని సేకరించడానికి ఎలాంటి విచారణ పద్ధతి ఎన్నుకోవాలో నిర్ణయించడం విచారణ ఉద్దేశ్యం, పరిధిపై ఆధారపడి ఉంటుంది. ఒక రాష్ట్రంలో ఒక పంట విస్తీర్ణం గూర్చి తెలుసుకోవాలంటే జనాభా పద్ధతిని అనుసరించాలి. అదే ఆ పంట దిగుబడిని గూర్చి తెలుసుకోవాలంటే ప్రతిచయన పద్ధతి సరిపోతుంది.

v) గణాంక ప్రమాణం : దత్తాంశ విచారణ ఉద్దేశ్యాన్ని, పరిధిని నిర్ణయించిన తర్వాత దత్తాంశాన్ని ఏ ప్రమాణాలలో సేకరించాలో గణాంక శోధకుడు నిర్ణయించాలి. గణాంక దత్తాంశాన్ని లెక్కింపు చేయడానికి, కొలవడానికి, విశ్లేషించడానికి ఉపయోగించే ప్రమాణాలనే గణాంక ప్రమాణాలు అంటారు. ప్రమాణాన్ని నిర్వచించబడవలసిన అవసరం గణాత్మక దత్తాంశానికి ఎక్కువగా ఉంటుంది. ఎందుకంటే, గణాత్మక దత్తాంశానికి ప్రమాణ సూచనలు ఉండవు.

గణాంక ప్రమాణాలు సాంప్రదాయకమైనవి లేదా సహేతుకం కానివి, కావచ్చు. సాంప్రదాయక ప్రమాణాలు అప్పటికే అమలులో ఉండి స్పష్టంగా నిర్వచించబడిన ప్రమాణాలు. అంటే మీటరు, లీటరు, గంట, కిలో మొదలైనవి సాంప్రదాయక ప్రమాణాలకు ఉదాహరణలు. అయితే అన్ని విచారణలకు ఇటువంటి గణాంక ప్రమాణాలు లభించవు. అప్పుడు గణాంక శోధకుడు సహేతుకం కాని ప్రమాణాలను ఎంచుకోవాలి. వేతనాలు, మూలధనం, లాభాలు, ధరలు అనేవి సహేతుకం కాని గణాంక ప్రమాణాలకు ఉదాహరణలు. ఈ పదాలకు అర్థం శోధన, శోధనకూ మారిపోతూ ఉంటుంది. కాబట్టి వీటిని శోధన ఉద్దేశ్యానికి అనుగుణంగా నిర్వచించుకోవాలి. గణాంక ప్రమాణాలును (i) గణన ప్రమాణాలు; (ii) విశ్లేషణ ప్రమాణాలు అని రెండు రకాలుగా విభజిస్తారు.

(i) గణన ప్రమాణాలు : ఒక సమస్యకు సంబంధించిన దత్తాంశాన్ని ఏ ప్రమాణాలలో సేకరిస్తారో ఆ ప్రమాణాలను గణన ప్రమాణాలు అంటారు. ఈ ప్రమాణాలు వస్తువులనుగాని, వ్యక్తులను గాని కొలవడానికి లేక లెక్కకట్టడానికి ఉపయోగిస్తారు. ఈ గణన ప్రమాణాలనే కొలత ప్రమాణాలు, సేకరణ ప్రమాణాలు అని కూడా అంటారు. వీటిని తిరిగి (ఎ) సాధారణ ప్రమాణాలు (బి) మిశ్రమ ప్రమాణాలు అని విభజించవచ్చు. సాధారణ ప్రమాణాలు అంటే వాడుకలో ఉన్న ప్రమాణాలు. వీటి అర్థం సులభంగా తెలుస్తుంది. ఒక రూపాయి, ఒక కిలో, ఒక గంట, ఒక కిలోమీటర్ మొదలగునవి. సాధారణ ప్రమాణాలకు ఉదాహరణలు సామాన్య ప్రమాణానికి ఒక విశేషణ పదాన్ని చేర్చడం ద్వారా వచ్చే ప్రమాణాన్ని మిశ్రమ ప్రమాణం అంటారు. ఈ విశేషణ పదం ప్రమాణ ఉపయోగాన్ని పరిమితం చేస్తుంది. పాసింజర్ కిలోమీటర్, టన్ను, కిలోమీటర్, కిలోవాట్ అవర్ మొదలగునవి మిశ్రమ ప్రమాణాలకు ఉదాహరణలు.

విశ్లేషణ ప్రమాణాలు : గణాంక దత్తాంశాన్ని విశ్లేషించి, సమర్పించి, వ్యాఖ్యానించడానికి ఉపయోగించే గణాంక ప్రమాణాలను విశ్లేషణ ప్రమాణాలు లేదా విపులీకరణ ప్రమాణాలు అంటారు. నిష్పత్తులు, శాతాలు, గుణకాలు, రేట్లు వీటికి ఉదాహరణలు.

vi) యదార్థత : గణాంక శోధకుడు దత్తాంశ సేకరణలో పాటించవలసిన యదార్థ పరిమితిని నిర్ణయించుకోవాలి. అన్ని విచారణల్లోనూ యధార్థత స్థాయి ఒకే రకంగా ఉండదు. కొన్ని విచారణల్లో యధార్థత స్థాయి ఎక్కువగా కొన్ని విచారణల్లో యధార్థత స్థాయి షుమారుగా ఉంటే సరిపోతుంది. ఉదాహరణకు, ఒక కళాశాలలోని విద్యార్థుల ఎత్తులను గూర్చి విచారణ జరుపుతూ ఉంటే వారి ఎత్తులను దగ్గర సెంటీమీటర్లలో కొలవడం సరియైన పద్ధతి. అలాగాక ఒక జిల్లాలోని వివిధ గ్రామాలకు జిల్లా కేంద్రం నుండి గల దూరాలను గూర్చి జరిపే విచారణలో దూరాన్ని దగ్గర కిలోమీటర్లలో కొలవడం సముచితంగా ఉంటుంది.

2.3 ప్రాథమిక దత్తాంశం - సేకరించే పద్ధతులు

ఒక నిర్దిష్ట ప్రయోజనం కోసం మొట్ట మొదటిసారిగా సేకరించిన దత్తాంశాన్ని ప్రాథమిక దత్తాంశం అంటారు. ఇది శోధకుడు ప్రాథమిక మూలం నుండి స్వయంగా మొట్టమొదటిసారిగా సేకరించినది. ఈ దత్తాంశం గణాంక విచారణకు ముడిసరుకు వంటిది. గణాంక శోధకుడు ఈ ముడి దత్తాంశానికి వివిధ గణాంక పద్ధతులు అన్వయించి తుది ఫలితాలను సాధిస్తాడు.

ప్రాథమిక దత్తాంశం సేకరించే పద్ధతులు : ప్రాథమిక దత్తాంశాన్ని సేకరించడానికి అనేక పద్ధతులున్నాయి. వీటిలో ఏ పద్ధతిని ఎన్నుకోవాలనేది విచారణా ఉద్దేశం, దత్తాంశ స్వభావం, ఫలితాలతో ఆశించే యధార్థత, అందుబాటులో గల వనరులు అనే మొదలగు అంశాల మీద ఆధారపడి ఉంటుంది. సాధారణంగా వాడుకలో ఉన్న ప్రాథమిక దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులను దిగువ వివరించాం.

2.3.1 ప్రత్యక్ష వ్యక్తిగత శోధన **(Direct Personal Investigation)** : ఈ పద్ధతిలో గణాంక శోధకుడు తనంతట తాను స్వయంగా సమాచార కర్తలను ముఖాముఖి కలసి వారిని ప్రశ్నించి తనకు కావలసిన వివరాలు సేకరిస్తాడు. ఈ పద్ధతిలో దత్తాంశాన్ని సేకరించేటప్పుడు శోధకుడు తెలివిగా వ్యవహరించాలి సమాచార కర్తల మనోభావాలను నొప్పించే విధంగా ప్రశ్నలు వేయరాదు. సమాచార కర్తల ఆచార వ్యవహారాల అలవాట్లు తెలుసుకుని వారితో కలసిమెలసి తిరుగుతూ, వారినుండి వివరాలు నేర్పుగా సేకరించాలి.

ప్రయోజనాలు :

(i) సమాచార కర్తలను స్వయంగా కలవడంవలన వారు అవసరమైన సమాచారాన్ని అందించడానికి ఎక్కువగా సహకరిస్తారు.

(ii) గణాంక శోధకుడే దత్తాంశాన్ని స్వయంగా సేకరించడం వల్ల అతనికి మానసిక తృప్తి ఉంటుంది.

(iii) సమాచార కర్తలకు వచ్చే సందేహాలను తీర్చడానికి అవకాశం ఉండడం వల్ల ఖచ్చితమైన దత్తాంశాన్ని సేకరించడానికి వీలుంది.

(iv) శోధకుడే వివరాలను స్వయంగా సేకరించినందున దత్తాంశం ఏక రూపతను కలిగి ఉంటుంది.

(v) సమాచార కర్తలకు చెందిన ఇతర అదనపు సమాచారాన్ని సేకరించే వీలున్నందున ఫలితాలను వివరించడంలో ఈ అదనపు సమాచారం చాల సహాయకారిగా ఉంటుంది.

(vi) సమాచార కర్తల యొక్క అక్షరాస్యత స్థాయికి సాంఘిక హోదాకు తగిన భాషను ఉపయోగించి వివరాలను సేకరించే అవకాశం ఉంది.

పరిమితులు :

(i) దత్తాంశ సేకరణ చాలా ఎక్కువమంది వ్యక్తులనుండి సేకరించవలసి వచ్చినప్పుడు, వారు వివిధ ప్రాంతాలలో ఉంటున్నప్పుడు ఈ పద్ధతి చాలా ఖర్చుతో కూడినది.

(ii) ఇతర పద్ధతులలో పోల్చితే ఈ పద్ధతిలో వ్యక్తిగత పక్షపాతం, దురభిమానం చోటు చేసుకునే వీలుంది.

(iii) దత్తాంశ సేకరణ జరిపేవారు సుశిక్షుతులు కానట్లయితే వారు సరైన సమాచారాన్ని సేకరించలేరు.

(iv) ఇతర పద్ధతులతో పోల్చితే దత్తాంశ సేకరణకు ఎక్కువ సమయం పడుతుంది. ఎందుకంటే సమాచార కర్తలకు అనుకూలమైన సమయంలోనే వారిని కలసి వివరాలు సేకరించవలసి ఉంటుంది.

2.3.2 పరోక్ష మౌఖిక శోధన (**Indirect Oral Investigation**) ప్రత్యక్ష వ్యక్తిగల శోధనకు కొన్ని సందర్భాలలో వీలుపడదు. మరికొన్ని సందర్భాలలో కొన్ని సమస్యలపై ఆ సమస్యలకు సంబంధించిన వ్యక్తులు ముఖాముఖి సమాధానాలు చెప్పడానికి ఇష్టపడరు. అలాంటి సందర్భాలలో ఆ సమస్యకు గురించి పూర్తి వివరాలు తెలిసిన సాక్షులు లేదా వితర వ్యక్తులను కొన్ని ప్రశ్నలు వేసి కావలసిన వివరాలు సేకరిస్తారు. దీనినే పరోక్ష మౌఖిక శోధన అంటారు.

ప్రయోజనాలు :

(i) ప్రత్యక్ష సాక్ష్యం సేకరించడానికి వీలులేని దత్తాంశ సేకరణ విషయంలో ఈ పద్ధతి అనువుగా ఉంటుంది.

(ii) ఒక వ్యక్తి అందించిన సమాచారం తప్పని భావిస్తే ఆ సమాచారాన్ని లెక్కలోకి తీసుకోకుండా, మరోవ్యక్తినుండి సమాచారం గ్రహించవచ్చు.

(iii) దత్తాంశ సేకరణకు ఎక్కువ కాలాన్ని, ధనాన్ని వెచ్చించనవసరంలేదు.

(iv) విచారణ పద్ధతి విస్తృతంగా ఉన్నప్పుడు ఈ పద్ధతి ఉపయోగపడుతుంది.

పరిమితులు :

(i) సాక్షులు లేదా గణాంక శోధకుడు పక్షపాతాన్ని చూపితే సేకరించిన దత్తాంశ యధార్ధత దెబ్బతింటుంది.

(ii) సాక్షులు విద్యావంతులై ఆ సమస్యను గూర్చి మొత్తం సమాచారం తెలిసినప్పుడే వారు అందించిన వివరాలు నమ్మదగినవిగా ఉంటాయి.

(iii) సాక్షులుగా ఎంపిక అయిన వారికి అసలు సత్యానికి, కల్పనలు చేర్చి చెప్పే స్వభావం ఉంటే, సేకరించిన దత్తాంశం విశ్వసనీయం ఉండదు.

2.3.3 విలేఖరుల ద్వారా సమాచారం : గణాంక శోధకులు దత్తాంశ సేకరణ నిమిత్తం ఈ పద్ధతికి వివిధ ప్రాంతాలలో స్థానిక విలేఖరులను నియమిస్తారు. ఈ విలేఖరులకు దత్తాంశ సేకరణ విధానంలో పూర్తి స్వేచ్ఛ ఉంటుంది. వీరు తమకు తోచిన రీతిలో దత్తాంశ సేకరణ జరిపి తమ కేంద్రీయ కార్యాలయానికి పంపుతారు. ఈ పద్ధతిలో గణాంక వివరాలు నిరవధికంగా అందుతాయి. సాధారణంగా ఈ పద్ధతిని ప్రభుత్వ, వార్తా పత్రికలు కావలసి సమాచార సేకరణ కోసం ఉపయోగిస్తాయి.

ప్రయోజనాలు :

(i) విచారణా పరిధి ఎక్కువగా ఉండి, దత్తాంశంలో పూర్తి యధార్ధత అవసరం లేనప్పుడు ఈ పద్ధతి అనువైంది.

(ii) ఈ పద్ధతిలో దత్తాంశ సేకరణకు అయ్యే ఖర్చు తక్కువగా ఉంటుంది.

(iii) విలేఖరులు స్థానికంగా ఉండడం వల్ల దత్తాంశ సేకరణ త్వరగా జరుగుతుంది.

పరిమితులు :

(i) వివిధ విలేఖరులు దత్తాంశ వివరాల సేకరణకు వివిధ పద్ధతులు పాటిస్తే దత్తాంశంలో ఏకరూపత ఉండదు.

(ii) స్థానిక విలేఖరుల వ్యక్తిగత పక్షపాతం, వారు అందించే సమాచారంలో చోటుచేసుకునే అవకాశం ఉంది. కాబట్టి సేకరించిన విరాలలోని యధార్ధతను గురించి సరిగా చెప్పడం కష్టం.

2.3.4 టెలిఫోన్ విచారణలు : ఈ పద్ధతిని అభివృద్ధి చెందిన దేశాలలోని వ్యాపార సంస్థలు, ప్రకటన సంస్థలు ఎక్కువగా ఉపయోగిస్తున్నాయి. ఒక సంస్థ తన వస్తువుల మీద వినియోగదారుల అభిరుచి గురించి సర్వే జరపదలచుకుంటే మొదట ఆ వస్తువుల వాడకందారులు, వారి టెలిఫోన్ నంబర్ల జాబితాను తయారుచేసి, దాని ప్రకారం టెలిఫోన్ ద్వారా ప్రతి వినియోగదారుని నుండి సమాచారం సేకరిస్తుంది.

ప్రయోజనాలు :

(i) ఈ పద్ధతిలో దత్తాంశ సేకరణకు తక్కువగా ఖర్చు అవుతుంది.

(ii) సేకరించిన దత్తాంశ వివరాలు నమ్మదగినదిగా ఉంటాయి.

పరిమితులు :

(i) ప్రతి వినియోగదారునికి ఫోన్ ఉండకపోవచ్చు. కాబట్టి అన్ని వర్గాల వారి నుండి వివరాలు సేకరించలేము.

(ii) ఫోన్ ద్వారా ఎక్కువ ప్రశ్నలు అడగడానికి వీలుకాదు. కాబట్టి ఇది విస్తృతమైన విచారణలకు పనికిరాదు.

(iii) ఈ పద్ధతిలో వివరాలను వేగంగా సేకరించాలి. కాబట్టి సమాచార కర్తలు నిర్లక్ష్యంతో కూడిన సమాధానాలు ఇవ్వడానికి అవకాశం ఉంది.

2.3.5 షెడ్యూళ్ళ పద్ధతి : విచారణ సమస్యకు సంబంధించిన కొన్ని నిర్దిష్ట ప్రశ్నలు గల నమూనా పత్రాన్ని షెడ్యూలు అంటారు. గణాంక శోధకులు కొన్ని ప్రశ్నలు గల నమూనా షెడ్యూళ్ళను తయారు చేసి, గణకులకు (enumerators) పంపి, వారి ద్వారా విషయ సేకరణ చేస్తారు. కాబట్టి ఈ పద్ధతిలో గణకులను ఎన్నుకొని వాళ్ళకు షెడ్యూళ్ళని నింపే విషయంలో శిక్షణ ఇవ్వాలి. గణకులు షెడ్యూళ్ళను తీసుకొని పూర్తిగా వివరాలు తెలిసిన వ్యక్తుల వద్దకు వెళ్ళి, వారిని యుక్తిగా ప్రశ్నించి జవాబులు రాబట్టి షెడ్యూళ్ళలో నింపుతారు.

ప్రయోజనాలు :

(i) గణకులు సమాచార కర్తలను ముఖాముఖి కలసి వివరాలు సేకరిస్తారు.

(ii) నిరక్షరాస్యుల నుండి కూడా దత్తాంశాన్ని సమస్యలు లేకుండా సేకరించడానికి వీలుంటుంది.

(iii) జవాబిచ్చే వారికి గల సందేహాలను గణకులు తీర్చడానికి అవకాశం ఉంది. అందువలన జవాబులు రాకపోవడమనే సమస్య ఉండదు.

(iv) షెడ్యూళ్ళలో ఉన్న ప్రశ్నలకు మాత్రమే జవాబులు సేకరించాలి. కాబట్టి గణకులు వ్యక్తిగత పక్షపాతం చూపడం కష్టం కావచ్చు.

పరిమితులు :

(i) దత్తాంశాన్ని సేకరించడానికి గణకులకు ప్రతిఫలం ఇచ్చినట్లయితే ఈ పద్ధతిలో అధిక వ్యయం అవుతుంది.

(ii) ఈ పద్ధతిలో సేకరించిన గణాంకాల యదార్థత, విశ్వసనీయత గణకులకు ఇచ్చిన శిక్షణ పై ఆధారపడి ఉంటుంది.

(iii) గణకులకు దత్తాంశ సేకరణలో ఆసక్తి లేకపోయినా, వారు నిష్పక్షికంగా లేకపోయినా, సేకరించిన గణాంక వివరాలు నమ్మదగినవిగా ఉండవు.

(iv) షెడ్యూళ్ళను జాగ్రత్తగా తయారుచేయకపోతే సేకరించిన గణాంకాలు తప్పు ఫలితాలనిస్తాయి.

(v) గణాంక వివరాల సేకరణలో అనేకమంది గణకులు పాల్గొనడం వలన సేకరించిన దత్తాంశంలో ఏకరూపత కొంత వరకు దెబ్బతినవచ్చు.

2.3.6 ప్రశ్నావళి పద్ధతి : విచారణా సమస్యకు సంబంధించిన వివిధ ప్రశ్నల జాబితా గల ముద్రిత నమూనా పత్రాన్ని ప్రశ్నావళి అంటారు. సూక్ష్మంగా చెప్పాలంటే ప్రశ్నావళి అంటే నిర్దిష్టమైన నమూనాలో గల ప్రశల జాబితా. ఆ జాబితాలోని ప్రశ్నలకు జవాబులు సమాచార కర్తలే (Informants) భర్తీ చేయవలసి ఉంటుంది. ఈ ప్రశ్నావళులను పోస్టు ద్వారా సమాచార కర్తలకు పంపి, వాటిని భర్తీచేసి తిప్పి పంపవలసినదిగా కోరుతూ ఒక లేఖ కూడా రాయడం జరుగుతుంది. అవసరమైతే వారినుండి సేకరించిన దత్తాంశం రహస్యంగా ఉంచబడుతుందనే హామీ ఇవ్వవలసి ఉంటుంది.

ప్రయోజనాలు :

(i) సమాచార కర్తలు విద్యావంతులు, దూర దూర ప్రాంతాలలో ఉండేవారు అయితే ఈ పద్ధతి అనుకూలంగా ఉంటుంది.

(ii) ఈ పద్ధతిలో దత్తాంశ సేకరణకు తక్కువ శ్రమ, ధనం అవసరమవుతాయి.

(iii) సమాచార కర్తలు బాధ్యత తెలిసిన వారైతే నియమిత కాలంలో నమ్మదగిన దత్తాంశాన్ని సేకరించే వీలుంటుంది.

(iv) సమాధానం ఇచ్చే వారే స్వయంగా ప్రశ్నావళి నింపుతారు. కాబట్టి శోధకునికి వ్యక్తిగత పక్షపాతానికి తావు ఉండదు.

(v) విస్తృతమైన గణాంక విచారణలకు ఈ పద్ధతి ఉపయోగించవచ్చు.

పరిమితులు :

(i) నిరక్షరాస్యత ఎక్కువగా ఉన్నచోట ఈ పద్ధతి ద్వారా దత్తాంశ సేకరణ కష్టం.

(ii) చాలామంది ప్రశ్నావళిని తిరిగి పంపరు. ఒకవేళ పంపినా ప్రశ్నావళిలో పూర్తి వివరాలను అందించకపోవచ్చు.

(iii) ప్రశ్నావళిని తయారు చేసిన వారు నిపుణులు కాకపోతే రూపొందించిన ప్రశ్నావళి నిరుపయోగం అవుతుంది.

(iv) సమాధానాలు ఇచ్చేవారు కొన్ని సందర్భాలలో నిర్లక్ష్యంగా అసత్య సమాచారాన్ని ఇవ్వవచ్చు.

షెడ్యూల్‌కి, ప్రశ్నావళికి గల తేడాలు : ఈ రెండింటిలోనూ అనేక ప్రశ్నలు గల జాబితా రూపొందించబడుతుంది. కాబట్టి వీటిలో 'న్ని పోలికలు ఉన్నప్పటికీ, కింది భేదాలను గమనించవచ్చు.

(i) షెడ్యూల్‌లో సమాధానాలు గణకులచే నమోదు చేయబడతాయి. కాని ప్రశ్నావళిలో జవాబులను సమాచారకర్తలే నమోదు చేస్తారు.

(ii) దత్తాంశం పరిమిత ప్రాంతం నుండి సేకరించడానికి షెడ్యూల్ వాడతారు. విస్తృత ప్రాంతం నుండి సేకరించడానికి ప్రశ్నావళి వాడతారు.

(iii) షెడ్యూల్ ద్వారా నిరక్షరాస్యుల నుండి కూడా వివరాలు సేకరించవచ్చు. కాని ప్రశ్నావళి ద్వారా అక్షరాస్యుల నుండి మాత్రమే దత్తాంశం సేకరించే వీలుంది.

(iv) షెడ్యూల్ ద్వారా రహస్య సమాచారం సేకరించలేము. కాని ప్రశ్నావళి ద్వారా రహస్య సమాచారం కూడా సేకరించే వీలుంది.

(v) షెడ్యూల్ ద్వారా దత్తాంశ సేకరణకు చిన్న ప్రతిచయనం సరిపోతుంది. కాని ప్రశ్నావళి ద్వారా దత్తాంశ సేకరణకు పెద్ద ప్రతిచయనం కావాలి.

(vi) షెడ్యూల్ ద్వారా దత్తాంశ సేకరణకు అధిక వ్యయం అవుతుంది. కాని ప్రశ్నావళి ద్వారా దత్తాంశ సేకరణకు అంతగా ఖర్చుకాదు.

(vii) షెడ్యూల్‌లో ఎలాంటి ప్రశ్నలైనా అడగవచ్చు. కాని ప్రశ్నావళిలోని ప్రశ్నలు సమాచార కర్తల విద్యస్థాయికి, హోదాకు తగిన విధంగా ఉండాలి.

(viii) షెడ్యూల్‌ను గణకుల సహాయంతో సమాచార కర్తలకు పంపుతారు. కాని ప్రశ్నావళి పోస్ట్ ద్వారా పంపడం జరుగుతుంది.

ప్రశ్నావళిని తయారుచేయడం : ప్రాథమిక దత్తాంశాన్ని సేకరించడంలో ప్రశ్నావళి లేక షెడ్యూల్‌కు ఒక విశిష్ట స్థానం ఉంది. ఖచ్చితమైన, సముచితమైన దత్తాంశాన్ని సేకరించడమనేది ప్రశ్నావళి లేదా షెడ్యూల్‌ను జాగ్రత్తగా తయారు చేయడం పై ఆధారపడి ఉంటుంది. మంచి ప్రశ్నావళి లేదా షెడ్యూల్‌ను తయారు చేయడం అనేది ఒక కళ. వీటి తయారీకి సార్వత్రిక నిబంధనలు ఏవీలేవు. విషయంలో గణాంక విచారణ కర్తకు గల అనుభవ, లోకజ్ఞానంతో బాటు సాధారణ సూత్రాలు చాలా వరకు మార్గదర్శకంగా ఉంటాయి.

గణాంక శోధకులు ప్రశ్నావళి తయారీని సులభమైన వ్యవహారంగా భావించి చాలా సందర్భములలో శ్రద్ధ వహించరు. వాస్తవానికి మంచి ప్రశ్నావళిని రూపొందించడం చాలా ప్రయాసతో కూడినపని. ప్రశ్నావళి లేదా షెడ్యూళ్ళ ద్వారా సేకరించిన తప్పుడు సమాచారాన్ని అద్భుతమైన విశ్లేషణ, వివరాలు కూడా సరిచేయజాలవు. కాబట్టి వీటి తయారీలో అత్యంత జాగ్రత్త వహించాలి.

ప్రశ్నావళి సూత్రాలు : ప్రశ్నావళి లేదా షెడ్యూల్ అనేది ఒక శాస్త్రీయ పద్ధతిలో ఉండి గణాంక విచారణ విజయవంతం కావాలంటే వాటిని తయారుచేసేవారు దిగువ ముఖ్యమైన సూత్రాలను పాటించాలి.

(i) ప్రశ్నలు తక్కువగా ఉండాలి. అలాగని అవసరమైన దానికన్న తక్కువ ప్రశ్నలు వేసి దత్తాంశ సేకరణను భంగపరచరాదు. అట్లాగే ఎక్కువ ప్రశ్నలు వేసి జవాబులు ఇచ్చేవారి ఓర్పును పరీక్షించరాదు.

(ii) సమాచార కర్త పరిజ్ఞానానికి అందుబాటులో గల ప్రశ్నలు మాత్రమే చేర్చాలి. అలా కానట్లయితే కాలం, ధనం వృధా అవుతాయి.

(iii) విచారణకు అవసరమైతే తప్ప సమాచార కర్త వ్యక్తిగత జీవితాన్ని గూర్చి ప్రశ్నలు అడగరాదు.

(iv) వ్యక్తిగత పలుకుబడులకు, అహంకారానికి చోటిచ్చే ప్రశ్నలు వేయరాదు. ఉదాహరణకు పేదరికం, కుటుంబ గౌరవం మొదలైన వాటిని గురించి ప్రశ్నలు వేయరాదు.

(v) సాధ్యమైనంత వరకు వివాదాస్పదమైన ప్రశ్నలు అడుగరాదు. తప్పనిసరి అయితే ఆ ప్రశ్నను సమాచారకర్త ప్రతిస్పందన తెలుసుకొనేలా విడగొట్టి అడగాలి.

(vi) సుదీర్ఘమైన చిక్కు ప్రశ్నలతో సమాచార కర్తలకు విసుగు కలిగించరాదు. సుదీర్ఘ ప్రశ్నలను వీలైతే కొన్ని చిన్న ప్రశ్నలుగా విడగొట్టి అడగాలి.

(vii) ప్రశ్నలలో వాడే భాష సరళంగాను, వినమ్రతతోను కూడా ఉండాలి. సరి అయిన భాష వాడకపోతే సమాచార కర్తకు కోపం, చిరాకు కలిగి సరైన జవాబులు రావు.

(viii) ప్రశ్నలకు ద్వంద్వార్థాలతో కూడిన పదాలను వీలైనంత వరకు వాడరాదు.

(ix) సాంకేతిక పదాలను సాధ్యమైనంత వరకు ప్రశ్నలతో వాడరాదు. ఒకవేళ సాంకేతిక పదాలను ఉపయోగిస్తే వాటిని స్పష్టంగా నిర్వచించాలి.

(x) సాధ్యమైనంత వరకు ప్రశ్నలకు జవాబులు 'అవును', 'కాదు' అని, లేదా ఒప్పు, తప్పు అని చెప్పగలిగేట్లుగా ఉండాలి.

(xi) కొన్ని సందర్భాలలో ప్రశ్నకు గల అన్ని ప్రత్యామ్నాయ జవాబులు ఇచ్చి సరైన జవాబును గుర్తించవలసిందిగా కోరాలి.

(xii) జవాబులను సగటులు, శాతాల రూపంలో అడుగడం కంటే ముడి దత్తాంశాన్ని అడగడం మంచిది. ఉదాహరణకు ఆదాయంలో ఎంతశాతం అద్దెగా చెల్లిస్తున్నారు అనే దానికంటే ఆదాయాన్ని, అద్దెను విడివిడిగా తెలుసుకోవడం మంచిది.

(xiii) ప్రశ్నావళిలోని ప్రశ్నలు తార్కికమై వరుసలో (Logical Order) ఉండేటట్లు అమర్చాలి. అంతేగాక ఒక విషయానికి చెందిన ప్రశ్నలన్ని ఒకే చోట సరైన వరుసలో ఉండాలి. దీని వలన జవాబుల నాణ్యత పెరుగుతుంది.

(xiv) ప్రశ్నావళిని రూపొందించే సమయంలో జవాబులను పట్టీకరణ చేయడానికి వీలుగా ఉండే ప్రశ్నలను తయారుచేయాలి.

(xv) ప్రశ్నావళిని నింపగలిగేటట్లు ప్రతిప్రశ్నను నింపే విధానాన్ని గూడా సూచించాలి.

(xvi) సంతృప్తికరమైన జవాబులు రాని ప్రశ్నలకు అనుబంధంగా జవాబులను సన్నిహితం చేసి యధార్థాన్ని నిరూపించే విధంగా కొన్ని బలపరచే క్రాస్ ప్రశ్నలను వేయాలి.

(xvii) సమాచార కర్తలకు పంపేముందు కొన్ని సందర్భాలలో తొలి సర్వేను (Pilot Survey) నిర్వహించవలసి ఉంటుంది. ఈ సర్వే ప్రశ్నావళిలోని లోపాలను వెల్లడిచేస్తుంది. అందువల్ల జవాబులు రాని ప్రశ్నలు తీసివేయడానికి వీలవుతుంది.

(xviii) ప్రశ్నావళిని ఆకర్షణీయంగా ముద్రించి, సమాచార కర్తల సహకారాన్ని అందించిన సమాచారం రహస్యంగా ఉంచబడుతుందనే హామీ ఇస్తూ, ప్రశ్నావళిని ఎప్పటిలోగా తిప్పి పంపాలో తెలుపుతూ ఒక లేఖ జతపరచాలి.

2.3.7 ప్రశ్నావళి నమూనా

సూపర్ బజార్, విజయనగరం

వినియోగదారుల అభిరుచులను తెలుసుకునే ప్రశ్నావళి

అయ్యా/ అమ్మా

మీరు సూపర్ బజార్‌కి వచ్చే వినియోగదారుల ప్రతినిధిగా భావిస్తున్నాం. ఈ సర్వే ద్వారా మీ అభిరుచులను తెలుసుకొని మీకు అవసరమైన విధంగా మెరుగైన సేవలు అందించాలని మా ప్రయత్నం. దయచేసి మీరు ఈ ప్రశ్నావళిని భర్తీచేసి దీనితో జతపరచిన స్టాంపులు అతికించిన కవరులో మా చిరునామాకు పంపవలసిందిగా అర్థిస్తున్నాం. మీరు అందించే వివరాలు పూర్తిగా రహస్యంగా ఉంచడం జరుగుతుందని హామీ ఇస్తున్నాం. మీరు ఈ అభిప్రాయ సేకరణలో సహకరించ వలసినదిగా అర్థిస్తూ.

మీ సేవాభిలాషి
సూపర్ బజార్

గమనిక : సరైన జవాబును ఎన్నుకొని దానికి ఎదురుగా ఇచ్చిన గడిలో టిక్ [✓] మార్కు చేయండి.

1. పేరు :
2. వయస్సు :
3. లింగభేదం : పురుషుడు [ ] స్త్రీ [ ]
4. వృత్తి : వ్యాపారం [ ] ఉద్యోగం [ ] ఇతరాలు [ ]
5. వైవాహిక స్థితి : వివాహితులు [ ] అవివాహితులు [ ]
6. కుటుంబ పరిమాణం : 4 వరకు [ ] 5 నుండి 6 [ ] 7, ఆపైన [ ]
7. నెలసరి ఆదాయం (రూ : 1000 వరకు [ ] 1001-2000 [ ] 2001, ఆపైన [ ]
8. నెలలో ఎన్నిసార్లు సూపర్ బజార్‌కి వెళతారు : 1 నుండి 2 [ ] 3 నుండి 6 [ ] 7, ఆ పైన[ ]
9. ఒక నిర్ణీతమైన రోజు షాపింగ్ చేస్తూ ఉంటారా? అవును [ ] కాదు [ ]
10. ఆ విధంగా అయితే, ఏ రోజు షాపింగ్ చేస్తూ ఉంటారు?
    సోమ [ ] మంగళ [ ] బుధ [ ] గురు [ ] శుక్ర [ ] శని [ ] ఆది [ ]
11. మీ రోజువారి అవసరాలలో ఎక్కువ సూపర్ బజార్‌లో కొంటారా? అవును [ ] కాదు [ ]
12. మీరు సూపర్ బజార్‌కి ఎంత దూరంనుండి వస్తారు?
    1 కి.మీ. లోపు దూరం [ ] 1 కి.మీ నుండి 2 కి.మీ [ ] 2 కి.మీ ఆపైన [ ]
13. సూపర్ బజార్‌కి ఏ విధంగా ప్రయాణం చేస్తారు? నడచి[ ] సైకిలు [ ] ద్విచక్ర వాహనం [ ] ఆటోరిక్షా [ ] కారు [ ]
14. మీరు సూపర్ బజార్‌లో సభ్యులా? అవును[ ] కాదు [ ]
15. సూపర్ బజార్ సరుకులు కొనడానికి ఈ క్రిందివి కారణమా?

ఏ. నాణ్యత గల వస్తువులు లభించడం అవును [ ] కాదు [ ]

బి. సముచిత ధరలు ఉండడం అవును [ ] కాదు [ ]

సి. బేరమాడే అవసరం ఉండకపోవడం అవును [ ] కాదు [ ]

డి. అనేక రకాలు లభించే వీలుండడం అవును [ ] కాదు [ ]

ఇ. కొరతగా ఉన్న సరుకులు లభించడం అవును [ ] కాదు [ ]

యఫ్. షాపింగ్ చేసే సమయం ఆదా కావడం అవును [ ] కాదు [ ]

జి. లభ్యమవుతున్న సేవలు అవును [ ] కాదు [ ]

హెచ్. సరైన తూకాలు, కొలతలు అవును [ ] కాదు [ ]

ఐ. దగ్గరగా ఉండడం అవును [ ] కాదు [ ]

జె. సభ్యులకిచ్చే డిస్కౌంట్ అవును [ ] కాదు [ ]

16. అమ్మకపు సిబ్బందిలో మీకు కన్పించిన లక్షణాలు ఏమిటి?

ఎ) మంచి మర్యాద [ ] మర్యాద లేక పోవడం [ ]

బి) సహకార ధోరణి [ ] అసహాయ ధోరణి [ ]

సి) చురుకుదనం [ ] మందగొండి తనం [ ]

డి) సామర్ధ్యం [ ] అసామర్ధ్యం [ ]

17. వస్తువుల ఎంపికలో అమ్మకపు సిబ్బంది సలహా పొందుతారా? అవును [ ] కాదు [ ]

18. సేల్స్‌మెన్‌కి బదులుగా సేల్స్‌గరల్స్‌ని ఉంచితే బాగుంటుందా? అవును [ ] కాదు [ ]

19. సూపర్ బజార్‌లో ఒకే వస్తువులో వివిధ రకాలు లభిస్తున్నాయా? అవును [ ] కాదు [ ]

20. సూపర్ బజార్‌లో మీరుకొనే వస్తువులు నాణ్యమైనవని భావిస్తున్నారా? అవును [ ] కాదు [ ]

21. వినియోగదారుల సహాయసేవలైన ధరల లేబుల్స్, పాకింగ్ చేసి ఉంచడం మొదలైనవి ఏవిధంగా ఉన్నాయి?

అద్భుతం [ ] పరవాలేదు [ ] అసంతృప్తికరం [ ]

22. సూపర్ మార్కెట్‌లో విభాగాల ఏర్పాటు సౌకర్యంగా ఉందా? అవును [ ] కాదు [ ]

23. సూపర్ బజార్ ఆవరణలో మేము అందిస్తున్న సౌకర్యాలు సంతృప్తికరంగా ఉన్నాయా? సంతృప్తికరంగా ఉన్నాయి [ ] లేవు [ ]

24. సూపర్ బజార్ మీకు ఎక్కువ సేవలు చేయాలంటే మీరు ఇచ్చే సూచనలేవి?

ప్రాథమిక దత్తాంశ ప్రయోజనాలు : ప్రాథమిక దత్తాంశ సేకరణవల్ల ఈ దిగువ ప్రయోజనాలు చేకూరతాయి.

i) ప్రాథమిక దత్తాంశం విచారణ ఉద్దేశాలకు తగిన విశ్వసనీయమైన, ఖచ్చితమైన సమాచారాన్ని అందిస్తుంది.

ii) ప్రాథమిక దత్తాంశం పుస్తకాలనుండి అంకెలను రాయడంలో వచ్చే దోషాలను తప్పులను చాలావరకు నివారిస్తుంది.

iii) విచారణ ఉద్దేశాన్ని దృష్టిలో ఉంచుకొని వివిధ భావాలను దానికి తగినట్లుగా నిర్వచించడం జరుగుతుంది. సేకరించిన దత్తాంశాన్ని పూర్తిగా ఉపయోగించుకోవచ్చు.

2.3.8. ప్రాథమి దత్తాంశ పరిమితులు : ప్రాథమిక దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించడంలో సాధారణంగా ఈ దిగువ పరిమితులు ఎదురవుతాయి.

i) దత్తాంశ సేకరణకు విచారణా ప్రణాళికను తయారు చేయడానికి, అమలు జరపడానికి ఎక్కువ సమయం పడుతుంది.

ii) దత్తాంశ సేకరణకు సుశిక్షితులైన, విశ్వసనీయమైన గణకులను నియమించడం వ్యయ ప్రయాసలతో కూడినపని.

iii) సమాచార కర్తలు సహకరించకపోయినా, శోధకులు నిజాయితీగా వ్యవహరించకపోయినా సేకరించిన ప్రాథమిక దత్తాంశం తప్పుదారి పట్టిస్తుంది.

2.4 ద్వితీయ దత్తాంశం - సేకరించే పద్ధతులు

ప్రభుత్వాలు, సంస్థలు, లేదా ఇతరులు లోగడ సేకరించి, విశ్లేషించి ప్రచురించిన లేదా ప్రచురించని దత్తాంశాన్ని తిరిగి శోధనకు ఉపయోగిస్తే వానిని ద్వితీయ దత్తాంశం అందురు. కాలవ్యయ సంబంధమైన ఇబ్బందులవల్ల అన్ని వేళలా ప్రాథమిక దత్తాంశాన్ని సేకరించడం సాధ్యంకాదు. అందువల్ల ద్వితీయ దత్తాంశాన్ని సేకరించవలసి ఉంటుంది. దీనిని సేకరించడానికి నిర్దిష్టమైన పద్ధతులు లేవు కాని వాటి వనరుల ద్వారా సేకరించాలి.

2.4.1 ద్వితీయ దత్తాంశ వనరులు : ద్వితీయ దత్తాంశాన్ని ఈ దిగువ వివరించిన రెండు రకాల వనరుల నుండి సేకరించవచ్చు.

A) ముద్రిత వనరులు : వివిధ సంస్థలు, ఏజెన్సీలచే సేకరించబడిన దత్తాంశం ప్రచురించబడి ఉటుంది. ఈ విధమైన దత్తాంశం దిగువ వనరుల నుండి సేకరించవచ్చు.

i) ప్రభుత్వ ప్రచురణలు : వివిధ రంగాలకు చెందిన గణాంక వివరాలను ప్రభుత్వం, ప్రభుత్వ సంస్థలు, సేకరించి ముద్రిస్తాయి. ఉదాహరణకు, జాతీయ ప్రతిచయ సర్వే (National Sample Survey) కేంద్రీయ గణాంకాల సంస్థ (Central Stastical Organisation) మొదలగు ప్రభుత్వ సంస్థలు గణాంక వివరాలను సేకరించి ప్రచురిస్తున్నాయి.

ii) పాక్షిక ప్రభుత్వ సంస్థల ప్రచురణలు : కొన్ని సంస్థలు ప్రభుత్వ అజమాయిషీ కింద గణాంక శోధనలు జరిపి ఫలితాలను ముద్రిస్తాయి. ఉదాహరణకు, భారతీయ రిజర్వుబ్యాంక్ వివిధ రంగాలకు చెందిన మౌలిక వివరాలను నివేదికల రూపంలో ప్రచురిస్తుంది.

iii) పరిశోధన సంస్థల ప్రచురణలు : వివిధ పరిశోధనా సంస్థలు వివిధ ప్రాజెక్టులను తీసుకొని వాటిపై నివేదికలను ప్రచురించడం జరుగుతుంది ఉదాహరణకు, భారతీయ వ్యవసాయ పరిశోధనా మండలి (ICAR), భారతీయ అనువర్తిత ఆర్థిక పరిశోధనా మండలి (NCAER) మొదలైన సంస్థలు పరిశోధనా ఫలితాలను ప్రచురిస్తున్నాయి. .

iv) ఇతర సంస్థల ప్రచురణలు : స్టాక్ ఎక్స్ఛేంజ్‌లు, ఆర్థిక, సహాయ సంస్థలు కార్మిక సంఘాలు, వాణిజ్య, పారిశ్రామిక వంటి వివిధ ప్రభుత్వ ప్రైవేట్ సంస్థలు తమ కార్యకలాపాలపై ప్రచురించే నియమితకాలిక (Periodical) నివేదికలో వివిధ రకాల దత్తాంశాన్ని ప్రచురిస్తున్నాయి.

v) వార్తా సంస్థలు ప్రచురణలు : ఆర్థిక, వాణిజ్య సమాచారాన్ని అందించే నియతకాలిక పత్రికలలో కొంత సమాచారం ముద్రించబడుతుంది. వీటిలో ఎకనామిక్ టైమ్స్, ఫైనాన్షియల్ ఎక్స్‌ప్రెస్ బిజినెస్ ఇండియా ముఖ్యమైనవి.

vi) అంతర్జాతీయ సంస్థల నివేదికలు : విషయాలపై గణాంక దత్తాంశాన్ని కొన్ని అంతర్జాతీయ సంస్థలు ప్రచురిస్తున్నాయి. వాటిలో అంతర్జాతీయ శ్రామిక సంస్థ (Internatioal Labour Organisation), అంతర్జాతీయ ద్రవ్యనిధి (International Monetary Fund) ప్రపంచ ఆరోగ్య సంస్థ (World Health Organisation) ఆహార, వ్యవసాయ సంస్థ (Food and Agricultural Organisation) మొదలైనవి ముఖ్మమైనవి.

B) ముద్రితంకాని వనరులు : పరిశోధకులు, పరిశోధనా సంస్థలు సేకరించిన దత్తాంశం కొన్ని సమయాలలో ధనాభావం లేక ఇతర కారణాలవల్ల ముద్రితం గాకపోవచ్చు. ఈ దత్తాంశాన్ని సేకరించిన వారి అనుమతిపొంది వారివద్దనున్న వ్రాతప్రతి ఆధారంగా కావలసిన దత్తాంశాన్ని సేకరించుకోవచ్చు. సాధారణంగా అటువంటి వనరులు ప్రైవేటు సంస్థల అంతర్గత రికార్డులనుండి వ్యక్తిగత పరిశోధకుల శోధన ఫలితాలనుండి పొందవచ్చు.

4.2 ద్వితీయ దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించే ముందు ఈ దిగువ జాగ్రత్తలు తీసుకోవాలి. దత్తాంశం నమ్మదగినది కాదని, విచారణ సమస్యకు సరిపోదని శోధకుడు భావించినప్పుడు దానిని ఉపయోగించరాదు. గణాంకాలు అబద్ధాలు చెప్పనప్పటికీ అబద్ధాలకోరులు అంకెలు చెప్తుతారు. కాబట్టి గణాంకాలు సేకరించిన వ్యక్తిలో నిజాయితి లోపిస్తే అవి నమ్మదగినవిగా ఉండవు.

i) ద్వితీయ దత్తాంశ విశ్వసనీయతను పరీక్షించడం : ద్వితీయ దత్తాంశ విశ్వసనీయతను దాని వనరులను పరీక్షించడం ద్వారా నిర్ధారిస్తారు. ప్రభుత్వ సంస్థలచే జారీచేయబడిన గణాంకాలకు శోధకులు యధాతథంగా నమ్ముతారు. అదే ప్రైవేటు వ్యక్తులు, సంస్థలు అయితే వారు ఆ దత్తాంశాన్ని ఎక్కడినుండి సేకరించారు? ఎప్పుడు సేకరించారు? ఏ పద్ధతుల ద్వారా సేకరించారు? అనే ప్రశ్నలకు సరైన సమాధానాలు సంపాదించిన తర్వాతే ద్వితీయ దత్తాంశాన్ని సేకరించాలి.

ii) ద్వితీయ దత్తాంశం ప్రస్తుత విచారణకు తగినవో, గావో నిర్ణయించాలి: అందుబాటులో ఉన్న ద్వితీయ దత్తాంశం ప్రస్తుత విచారణ ఉద్దేశ్యానికి యధాతథంగా ఉపయోగపడుతుందా? లేదా? ప్రస్తుత విచారణకు సరిపోయినంతగా ఉందా? లేదా? అనే విషయాన్ని పరీక్షించాలి. ఆ తరువాతే ద్వితీయ దత్తాంశాన్ని స్వీకరించాలి.

iii) ద్వితీయ దత్తాంశం సమగ్రమైనదో కాదో నిర్ణయించాలి : స్వీకరించిన దత్తాంశం నమ్మదగినిది, సరైంది అని నిర్ధారిం కొన్న తర్వాత దత్తాంశం సంపూర్ణంగా స్వీకరించబడిందా, లేదా అన్న విషయాన్ని పరిశీలించాలి. అసంపూర్ణ దత్తాంశం ఆధారంగా తీసుకొన్న నిర్ణయాలు దోషపూరితంగా ఉండి నిష్ప్రయోజనం అవుతాయి.

నార్ చెప్పినట్లు గణాంకాలు, ముఖ్యంగా ఇతరులు సేకరించిన గణాంకాలు, సాధారణంగా లోపాలతో కూడి ఉండవచ్చు కాబట్టి వాటిని గుడ్డిగా నమ్మరాదు. అలాగే ప్రముఖ గణాంక శాస్త్రవేత్త ఏ.యల్.బౌలీ ద్వితీయ దత్తాంశాన్ని గూర్చి ఈవిధంగా అన్నాడు. ప్రచురించిన గణాంకాలు అర్థం, పరిమితులు తెలుసుకోకుండా వాటిని ముఖ్య విలువలకు అంగీకరించడం శ్రేయస్కరం కాదు. వాటిపై ఆధారపడి చేసే వాదనలకు ఎల్లప్పుడు విమర్శించవలసిన అవసరం ఉంటుంది.

2.4.3 ద్వితీయ దత్తాంశం ప్రయోజనాలు :

1. గతంలోనే సేకరించి, విశ్లేషించబడి ఉండటంచేత ద్వితీయ దత్తాంశాన్ని సేకరించడం సౌకర్యంగా ఉంటుంది.
2. కాల, ద్రవ్య అవరోధాలు కారణంగా కొన్ని గణాంక వివరాలను ప్రైవేటు, వ్యక్తులు సంస్థలు సేకరించలేవు అటువంటి దత్తాంశాన్ని ద్వితీయ వనరులనుండి సేకరించవచ్చు.

4.4 ద్వితీయ దత్తాంశ పరిమితులు :

1. దత్తాంశాన్ని నిర్దిష్ట ప్రయోజనానికి సేకరించి ఉంటే ఆ దత్తాంశం ప్రస్తుత గణాంక విచారణకు సరిపోవచ్చు.
2. ప్రాథమిక దత్తాంశం సేకరణలో సాధించిన యదార్థత ప్రస్తుత గణాంక విచారణలో ఉద్దేశించిన యదార్థత ఒకటి కానప్పుడు ద్వితీయ దత్తాంశం సముచితం కానిది అవుతుంది.
3. ప్రాథమిక దత్తాంశం సేకరణలో పాక్షిక, సాపేక్షిత దోషాలు చోటుచేసుకొనే అవకాశం ఉంది. అందువల్ల ద్వితీయ దత్తాంశం నమ్మదగినది కాదు.
4. ప్రాథమిక దత్తాంశంలో ఉపయోగించిన భావాలు ప్రస్తుత విచారణకు అన్ని వేళలా ఉపయోగించకపోవచ్చు. దానిని గమనించకపోతే విచారణకు ఫలితాలు తప్పుగా ఉంటాయి.

2.4.5 ప్రాథమిక, ద్వితీయ దత్తాంశాలకు మధ్యగల తేడాలు : ఒక సమస్యపై విచారణ జరపడానికి సేకరించిన అసలు దత్తాంశం ప్రాథమిక దత్తాంశం అవుతుంది. ఈవిధంగా సేకరించిన దత్తాంశాన్ని మరొకరు తమ విచారణ అవసరాలకు వినియోగిస్తే అది ద్వితీయ దత్తాంశం అవుతుంది. ప్రముఖ గణాంక శాస్త్రవేత్త హోరేస్ సేక్రిస్ట్ దత్తాంశాలకు గల తేడా చాలా వరకు స్థాయి (Degree) తేడా మాత్రమేనని చెప్పాడు. ఒకరి చేతిలో ప్రాథమిక దత్తాంశంగా ఉన్నవి, మరొకరి చేతిలో ద్వితీయ దత్తాంశం అవుతుంది. ఈ దత్తాంశాల మధ్యగల తేడా కేవలం సాపేక్ష తారతమ్యమే అయినప్పటికీ కింద వివరించిన అంశాల ద్వారా గమనించవచ్చు.

1. దత్తాంశ మూలం : ప్రాథమిక దత్తాంశం మౌలిక వనరుల నుండి సేకరిస్తారు. గతంలో సేకరించబడిన ప్రాథమిక దత్తాంశాన్ని ద్వితీయ దత్తాంశంగా ప్రస్తుత విచారణలకు ఉపయోగిస్తారు.
2. దత్తాంశ స్వభావం : ప్రాథమిక దత్తాంశం మౌలిక స్వభావాన్ని కలిసి ముడిరూపంలో ఉంటుంది కానీ ద్వితీయ దత్తాంశం వ్యవస్థీకరించబడి, గణాంక పద్ధతులకు గురై ఉండటం వలన శుద్ధిచేయబడిన రూపంలో ఉంటుంది.
3. గణాంక ప్రమాణాలు : ప్రాథమిక దత్తాంశంలో విచారణ ఉద్దేశ్యాన్ని బట్టి గణాంక ప్రమాణాన్ని నిర్వచిస్తారు. కానీ ద్వితీయ దత్తాంశంలో క్రొత్తగా గణాంక ప్రమాణాలను నిర్వచించక ప్రాథమిక దత్తాంశంలో ఉపయోగించిన ప్రమాణాలనే తీసుకొంటారు.
4. విచారణ ప్రణాళిక : దత్తాంశ సేకరణ కోసం ప్రాథమిక దత్తాంశం విషయంలో విచారణా ప్రణాళికను తయారుచేసి, అమలు జరుపవలసి ఉంటుంది. కాని ద్వితీయ దత్తాంశ సేకరణ విషయంలో విచారణా ప్రణాళికను తయారు చేయవలసిన అవసరం లేదు.

5. వనరుల లభ్యత : ప్రాథమిక దత్తాంశ సేకరణకు ఎక్కువ కాలం, ధనం అవసరమవుతాయి. కాని తక్కువ కాల, ధన వ్యయాలతో ద్వితీయ దత్తాంశ సేకరణను పూర్తిచేయవచ్చు.

అభ్యాసాలు

ఏ) ఈ క్రింది వానికి సంక్షిప్తంగా జవాబులు రాయండి.

1. గణాంక ప్రమాణం అనగానేమి? దానిలోని రకాలను వివరించండి.
2. సమానీకరణ అనగనేమి?
3. గణాంక క్రమత్వ సిద్ధాంతం అనగానేమి?
4. యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతి అంటే ఏమిటి?
5. ఉద్దేశపూర్వక ప్రతిచయనం అంటే ఏమిటి?

బి) ఈ క్రింది వానికి విపులంగా జవాబులు రాయండి.

1. ప్రాథమిక, ద్వితీయ దత్తాంశానికి గల తేడా ఏవి?
2. ద్వితీయ దత్తాంశానికి గల ప్రయోజనాలు, పరిమితులను వివరించండి.
3. ప్రశ్నావళికి, షెడ్యూలుకి గల తేడాలేవి?
4. ద్వితీయ దత్తాంశం అనగానేమి దానికి గల ముఖ్య వనరుల ఏవి?
5. గణాంక శోధనలో గల వివిధ దశలను క్లుప్తంగా వివరించండి.
6. ప్రాథమిక దత్తాంశాన్ని సేకరించే వివిధ పద్ధతులు వివరించండి.
7. ప్రశ్నావళి పద్ధతిలోని ప్రయోజనాలను చర్చించండి. ప్రశ్నావళికి ముఖ్య అవశ్యకాలు ఏవి?
8. ప్రాథమిక దత్తాంశం అనగానేమి? ప్రాథమిక దత్తాంశానికి గల ప్రయోజనాలను, పరిమితులను వివరించండి. ప్రాథమిక దత్తాంశం సేకరణ ముందు తీసుకోవలసిన జాగ్రత్తలేవి?
9. బట్టల సబ్బుగురించి వినియోగదారుల అభిరుచుల సర్వేకోసం ఒక షెడ్యూలు తయారుచేయండి?
10. విద్యార్థుల అశాంతికి గల కారణాలను నిర్ణయించడానికి తగిన ప్రశ్నావళిని తయారు చేయండి.

పాఠం - 3

శ్రేణీకరణ - పట్టీకరణ - చిత్రపటాలు - రేఖాచిత్రాలు

దత్తాంశ సేకరణ జరిగిన తరువాత వివరమైన విశ్లేషణకుముందు సులభ పద్ధతులలో దత్తాంశ విషయాలను సమర్పించటం ఈ పాఠము యొక్క ఉద్దేశ్యము.

ముఖ్యాంశాలు :

3.1 శ్రేణీకరణ

3.2 పట్టీకీకరణ

3.3 చిత్రపటాలు

3.4 రేఖాచిత్రాలు

3.1 శ్రేణీకరణ :

శ్రేణీకరణ అర్థం - నిర్వచనం : సేకరించిన దత్తాంశాన్ని అర్థవంతంగాను, ప్రయోజనకరంగాను చేయడానికి ఒక క్రమపద్ధతిలో అమర్చాలి. దత్తాంశాన్ని సాధారణ లక్షణాల ఆధారంగా గాని, శ్రేణుల నిర్మాణ పద్ధతుల ఆధారంగా గాని ఒక క్రమ పద్ధతిలో అమర్చే విధానాన్ని శ్రేణీకరణ అంటారు. ఆచార్య కొన్నార్ ప్రకారం రెండు చలరాశులను, ఒకదానిలోని కొలువదగిన తేడాలు మరొక చలరాశిలోని కొలవదగిన తేడాలు అనురూపంగా ఉండే రీతిలో ఒకదాని ప్రక్కన మరొకటి ఏర్పాటు చేయగలిగినట్లయితే, ఆ ఫలితాన్ని గణాంక శ్రేణులుగా ఏర్పడనట్లు పేర్కొంటారు.

పౌనఃపున్య శ్రేణులు : గణాంక శాస్త్రం ఏ విషయాన్నైనా అంకెలలోనే వివరిస్తుంది. గణాంక విచారణలో కొన్ని విషయాలు పరిమాణాత్మకంగా వ్యక్తం చేయ వీలుండదు. ఉదాహరణకు, మతం, వైవాహిక స్థితి, అక్షరాస్యత, కులం, మొదలనవి. కొన్ని విషయాలను పరిమాణాత్మకంగా చెప్పడానికి లేదా కొలవడానికి వీలుంది. వీటికి ఎత్తు, బరువు, వయస్సు, మార్కులు, ఆదాయం మొదలైనవి. ఉదాహరణలు. ఈ చలరాశుల పరిమాణాలను గణాంక శోధకులు వ్యక్తిగత అంశాలనుండి సేకరిస్తారు. ఈ విధంగా సేకరించిన పరిమాణాత్మక ముడి దత్తాంశాన్ని పరిమాణరీత్యా అమర్చిన శ్రేణులను పౌనఃపున్య శ్రేణులు అంటారు. ఈ దృక్పధంలో గణాంక దత్తాంశాన్ని 3 రకాల శ్రేణులుగా విభజిస్తారు. అవి : i) వ్యక్తిగత శ్రేణులు (ii) విచ్ఛిన్న శ్రేణులు (iii) అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు

i) వ్యక్తిగత శ్రేణులు (Individual Series) : గణాంక విచారణా పరిధిలోని ప్రతి అంశపు విలువను పరిశీలించి వాటిని వ్యక్తిగతంగా జాబితా రాస్తారు. వీటిని ఏ రకంగాను వర్గాలుగా విభజించి అమర్చడం జరగదు. సాధారణంగా ఇచ్చిన ముడి దత్తాంశాలను ఒక పద్ధతి ప్రకారం అమర్చడం జరుగుతుంది. అంతేగాక చదువరులకు ఏ విధమైన అభిప్రాయాన్ని కలిగించలేవు. కాబట్టి దత్తాంశాన్ని ఆరోహణ క్రమంలో లేదా అవరోహణ క్రమంలో తిరిగి అమర్చుకోవడం ద్వారా దత్తాంశం మీద ఒక అవగాహన ఏర్పరచుకొంటారు.

ii) విచ్ఛిన్న శ్రేణులు (Discrete Series) : దత్తాంశాన్ని కొన్ని లక్షణాల ఆధారంగా వర్గీకరించితేనే గణాంక విశ్లేషణకు, వివరణకు ఉపయోగపడుతుంది. విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో ఒక చలరాశిలోని వివిధ విలువలను విచ్ఛిన్న సంఖ్యల్లో విడివిడిగా చూపడం జరుగుతుంది. ఒక అంశానికి ఇంకొక అంశానికి ఖచ్చితమైన ఖాళీ ఉంటే అట్లాంటి శ్రేణులను విచ్ఛిన్న శ్రేణులు అంటారు. అంటే చలరాశి విలువలు సంపూర్ణ సంఖ్యలుగాను, విభజించడానికి వీలులేనివిగాను ఉంటాయి. కుటుంబంలోని పిల్లల సంఖ్య, ఒక ఇంటిలోని గదుల సంఖ్య, విచ్చిన చలరాశులకు ఉదాహరణలు. విచ్చిన శ్రేణుల పౌనఃపున్య విభజనం తయారు చేసేవిధానం.

1. ఇచ్చిన అవర్గీకృత దత్తాంశంలోని అత్యధిక, అత్యల్ప విలువలు కనుగొనాలి.

2. అత్యల్ప విలువల నుండి అత్యధిక విలువ వరకు చలరాశి విలువలను వరుసగా రాసుకోవాలి.

3. ఇచ్చిన దత్తాంశంలోని ఒక్కొక్క విలువ తీసుకొని అది చలరాశి విలువకు ఎదురుగా గణ చిహ్నాలు అనే శీర్షిక కింద ఒక గణ చిహ్నం (I) రాయాలి.

4. ఆ చలరాశి రెండుసార్లు పునరావృతమైనప్పుడు మరొక గణ చిహ్నంతో సూచిస్తాము (II). ఇదేవిధంగా నాల్గుసార్లు వేసిన తరువాత 5వ సారి పునరావృతమైనప్పుడు, 5వ గణచిహ్నాన్ని అడ్డగీతగా సూచిస్తాం (~~IIII~~). అప్పుడు 5 గీతల సమూహాన్ని తేలికగా గుర్తించవచ్చు, లెక్కించవచ్చు.

5. తిరిగి ఆరవసారి అదే విలువ పునరావృతమైనట్లయితే, పైన సూచించిన సమూహానికి కొంచెం దూరంగా, గణ చిహ్నాన్ని, గీయడం ద్వారా సూచిస్తాము. తిరిగి 5 గీతల సమూహం తయారు చేస్తాము... ఈ విధంగా కాక, మొత్తం అన్ని గణ చిహ్నాలను వరుసగా గీసి చూపినట్లయితే (IIIIII) లెక్కపెట్టడంలో గందరగోళం సృష్టింపబడుతుంది. తప్పులు చేసే అవకాశం ఎక్కువగా ఉంటుంది.

6. ప్రతి చలరాశి విలువకు ఎదురుగా గల గణచిహ్నాలు లెక్కిస్తే ఆ చలరాశి విలువకు సంబంధించిన పౌనఃపున్యం తెలుస్తుంది. పౌనఃపున్యాలను 'f' తోను, వాటి మొత్తాన్ని 'N' తోను సూచించడం పరిపాటి. ఈవిధంగా తయారైనదే విచ్ఛిన్న పౌనఃపున్యం విభాజనం.

ఉదా 3 : ఒక సంస్థలో పని చేసే తాత్కాలిక కార్మికుల రోజు వారి వేతనాలను విచ్ఛిన్న పౌనఃపున్య విభజన పట్టిగా తయారు చేయండి.

13	15	14	13	16	14	13	12	13	14	16	13
14	12	15	14	13	13	16	13	14	12	17	14
13	16	14	13	14	17	15	12	16	14	13	15
12	14	13	15	15	13	15	13	15			

జవాబు : 45 మంది కార్మికుల రోజువారి వేతనాల పౌనఃపున్య విభాజనం

రోజువారి వేతనాలు	గణచిహ్నాలు	పౌనఃపున్యం (f)
12	~~IIII~~	5
13	~~IIII~~ ~~IIII~~ IIII	14
14	~~IIII~~ ~~IIII~~ I	11
15	~~IIII~~ III	8
16	~~IIII~~	5
17	II	2
		N = 45

iii) అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు (Continuous Series): ఖచ్చితంగా కొలవలేని అంశాలను కొన్ని అవధుల మధ్య అమర్చి తరగతులుగా విభజిస్తే వాటిని అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు అంటారు.

ఈ శ్రేణిలో - చలరాశి విలువలను వివిధ వ్యాప్తి పదాలలో సూచించడం జరుగుతుంది. వాటినే తరగతి అంతరం (Class Interval) అంటారు. అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో తరగతి అంతరాలు పౌనఃపున్య విభాజనంలోని ప్రారంభ విలువనుండి చివర విలువ వరకు

విరామం లేకుండా కొనసాగుతాయి. అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులను దిగవ అవధి, ఎగువ అవధులు కలిగి ఉన్న వివిధ తరగతులుగా తరగతి అంతరాలలో ఏర్పాటు చేయడం జరుగుతుంది.

ఉదాహరణకు, 0-10, 10-20, 20-30, 30-40 అనేవి తరగతులైతే ఒక్కో తరగతిలో మొదటి యిచ్చిన సంఖ్యలు అంటే 0, 10, 20, 30, 40 మొదలైనవి ఆయా తరగతుల దిగువ అవధులు అంటారు. అదేవిధంగా ఒక్కొక్క తరగతిలో చివర యిచ్చిన సంఖ్యలు అంటే 10, 20, 30, 40 అనేవి ఆయా తరగతుల ఎగువ అవధులని అంటారు. ఒక తరగతి అంతరంలో ఎగువ అవధికి, దిగువ అవధికి గల భేదాన్ని తరగతి అవిధి పరిమాణం అంటారు. వివిధ తరగతులను, వాటి పౌనఃపున్యాలను తెలిపే పట్టిని అవిచ్ఛిన్న పౌనఃపున్య విభాజనం అంటారు. ఎత్తు, బరువు, వయస్సు, దూరం, వర్షపాతం, ఉష్ణోగ్రత మొదలైనవాటిని ఖచ్చితంగా కొలవడానికి వీలుపడదు. ఇవి అవిచ్ఛిన్న చలరాశులకు ఉదాహరణలు. అవిచ్ఛిన్న పౌనఃపున్య విభాజనాన్ని కింది ఉదాహరణ ద్వారా పేర్కొనడమైనది.

ఉదా : 4 ఒక తరగతిలోని విద్యార్థుల ఎత్తులను చూపే పౌనఃపున్య విభాజనం.

ఎత్తులు (సెం॥ మీ.)	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)
150 - 155	15
155 - 160	22
160 - 165	18
165 - 170	12
170 - 175	8
175 - 180	5
	N = 80

అవిచ్ఛిన్న పౌనఃపున్య విభాజనం నిర్మించే విధానం : గణాంక విచారణలో సేకరించిన ముడి దత్తాంశాన్ని వివిధ లక్షణాలను బట్టి కొన్ని తరగతులుగా వర్గీకరించడం జరుగుతుంది. ఆ విధంగా వర్గీకరించడం వలన పౌనఃపున్య విభాజనాన్ని తయారు చేయడం సులభమవుతుంది. పౌనఃపున్య విభాజనాన్ని తయారు చేయడానికి ముందు, మూడు ముఖ్య విషయాల గూర్చి నిర్ణయం తీసుకోవలసి ఉంటుంది. అవి :

A. తరగతుల సంఖ్య

B. తరగతి అంతరాల పరిమాణం

C. తరగతి అవధులు

A. తరగతుల సంఖ్య : ఒక దత్తాంశాన్ని ఎన్ని తరగతులుగా విభజించాలి అనే ప్రశ్నకు నిర్దిష్టమైన సూత్రాలు లేవు. ఇది దత్తాంశంలోని అంశాల సంఖ్య, దత్తాంశ స్వభావం, వర్గీకరణ ఉద్దేశ్యం, తరగతి అంతరాల పరిమాణం మీద ఆధారపడి ఉంటుంది. అంశాల సంఖ్య ఎక్కువగా ఉండి తరగతుల సంఖ్య తక్కువైతే ఒక్కో తరగతిలో అంశాల సంఖ్య అధిక సంఖ్యలో గుమికూడి దత్తాంశపు ముఖ్య లక్షణాలు లభ్యంకావు. అట్లాగే అంశాల సంఖ్య తక్కువగా ఉండి తరగతుల సంఖ్య ఎక్కువయితే కొన్ని తరగతులలో పౌనఃపున్యం స్వల్పంగా ఉండడం మరికొన్నింటిలో పౌనఃపున్యం అసలు లేకపోవడం జరుగుతుంది.

అదే విదంగా తరగతి అంతర పరిమాణం పెద్దదిగా ఉంటే తరగతి అంతరాల సంఖ్య తక్కువగాను, చిన్నదిగా ఉంటే తరగతుల సంఖ్య ఎక్కువగాను ఉంటుంది. వాస్తవానికి ఎన్ని తరగతులు ఉండాలనే సమస్యను, అంశాలను సంఖ్యను తరగతి అంతర పరిమాణాన్ని బట్టి నిర్ణయిస్తారు. సాధారణంగా తరగతుల సంఖ్య 6 నుండి 16 వరకు ఉంటే బాగుంటుందని క్రాక్స్టన్, కౌడన్ అనేవారు చెప్పారు.

స్టర్జెస్ సూత్రం : తరగతి అంతరాల గూర్చి ఏమి తెలియనప్పుడు ప్రొఫెసర్ హెచ్.ఏ. స్టర్జస్ సూచించిన కింద సూత్రం ఉపయోగించి తరగతుల సంఖ్యను నిర్ణయిస్తారు.

$$n = 1 + 3.322 \text{ Log } N$$

ఇక్కడ n = తరగతులు సంఖ్య

N = అంశాల సంఖ్య

log = సంవర్గమానం

ఈ సూత్రం ద్వారా నిర్ణయించిన విలువను తరువాత పూర్ణసంఖ్యకు సవరించాలి. ఈ విలువ 5 నుండి 20 వరకు ఉంటుంది (ఒక సంఖ్యకు సంవర్గమానమును పట్టికల ఆధారంగా తెలుసుకోవడం విద్యార్థులు నేర్చుకొని ఉంటారు లేదా Calculator ద్వారా కూడా వస్తుంది)

B. తరగతి అంతరాల పరిమాణం : తరగతి అంతరపరిమాణం ఎంత ఉండాలి అనేది సాధారణంగా దత్తాంశపు విలువలలోని వ్యాప్తిమీద, దత్తాంశాన్ని ఎన్ని తరగతులుగా విభజించాలి అనే నిర్ణయం మీద ఆధారపడి ఉంటుంది. దత్తాంశంలోని గరిష్ట కనిష్ట విలువలకు గల తేడాని వ్యాప్తి (Range) అంటారు. ఈ తరగతి అంతర పరిమాణం రెండు, ఐదు లేదా వాటి గుణిజాలుగా ఉంటే బాగుంటుంది. అంటే 1, 3, 7, 9 మొదలైన సంఖ్యలను తరగతి అంతరంగా ఉపయోగించరాదు. తరగతి అంతరం సాధ్యమైనంత వరకు అన్ని తరగతులలో సమానంగా ఉంటే బాగుంటుంది. ఇది అన్ని తరగతులలో సమానంగా ఉంటే సమాన తరగతి అంతర పరిమాణం అంటారు. సమానంగా లేకపోతే అసమాన తరగతి అంతర పరిమాణం అంటారు.

తరగతి అంతర పరిమాణ నిర్ణయం - స్టర్జస్ సూత్రం : ఆచార్య హెచ్. స్టర్జస్ సూచించిన ఈ క్రింది సూత్రం ద్వారా తరగతి అంతర పరిమాణాన్ని నిర్ణయించవచ్చు.

$$i = \frac{L - S}{1 + 3.32\ 2 \log N}$$

ఇక్కడ i = తరగతి అంతరం

L = అత్యధిక విలువ

S = అత్యల్ప విలువ

ఉదాహరణ 5 : తగిన అంతరం ఎన్నుకొని ఒక శీతల పానీయాల తయారీ సంస్థలో పని చేసే 40 మంది పనివారి నెలసరి జీతాలు పౌనఃపున్య విభాజన రూపంలో అమర్చండి.

195	87	108	128	65	100	120	150
202	212	94	103	145	126	95	88
107	122	93	147	92	117	135	186
190	101	148	163	172	96	105	133
143	131	93	86	145	186	109	106

జవాబు : ఈ దత్తాంశంలో గరిష్ట విలువ 212, కనిష్ట విలువ 65 కాబట్టి వ్యాప్తి 147. స్టర్జస్ సూత్రం ప్రకారం తరగతుల అంతరాన్ని నిర్ణయించాలి.

$$i = \frac{L - S}{1 + 3.32\ 2 \log N}$$

$$= \frac{147}{1 + 3.32 \; 2 \log 40}$$

$$= \frac{147}{1 + 3.32 \; 2 \times 1.602}$$

$$= \frac{147}{1 + 5.322}$$

$$= \frac{147}{6.322} = 23.25$$

తరగతి అంతరాలు 5 గుణిజాలుగా ఉండాలి. కాబట్టి తరగతి అంతరం 25గా తీసుకోవడమైంది. మొదటి తరగతి 65 - 90. చివరి తరగతి 190 - 215

నెలసరి జీతాలు	గణచిహ్నాలు	పౌనఃపున్యం (f)
65 - 90	IIII	4
90 - 115	~~IIII~~ ~~IIII~~ IIII	14
115 - 140	~~IIII~~ III	8
140 - 165	~~IIII~~ II	7
165 - 190	III	3
190 - 215	IIII	4
		N = 40

C. తరగతి అవధుల నిర్ణయం : తరగతి అవధులు నిర్ణయించేటప్పుడు తరగతి మధ్య విలువ, ఆ తరగతిలోని అంశాల సగటుకి సాధ్యమైనంత దగ్గరగా ఉండేటట్లు చూడాలి.

ఇంతకు ముందు వివరించినట్లు తరగతి అవధులు 2, 5 లేదా వాటి గుణిజాలుగా ఉంటే దత్తాంశ విశ్లేషణలో సౌలభ్యం ఉంటుంది. తరగతి అవధులను సాధారణంగా ఈ కింది రూపాలలో నిర్ణయిస్తారు.

1) మినహాయింపు రూపం

2) విలీన రూపం

3) ఇతర రూపాలు

1) మినహాయింపు రూపం (Exclusive form) : ఈ పద్ధతిలో ఒక తరగతి ఎగువ అవధి, మరో తరగతి దిగువ అవధిగా ఉంటుంది. ఈ విధంగా దత్తాంశాన్ని వర్గీకరించడం వలన వర్గీకరణలో అవిచ్ఛిన్నత ఏర్పడుతుంది. కాని తరగతి అవధులు స్పష్టంగా ఉండవు. అందువల్ల ఏ విలువను ఏ తరగతిలో చేర్చాలనే అనుమానం వస్తుంది. ఈ పద్ధతిలో ఒక తరగతి ఎగువ అవధిగా ఉన్న విలువను ఆ తరగతిలో మినహాయించి, ఆ తరువాత తరగతిలో చేర్చుతారు. అందువల్ల దీనికి మినహాయింపురూపం అనే పేరు వచ్చింది. ఉదాహరణకు, కింది పౌనఃపున్య విభాజనాన్ని పరిశీలించండి.

మినహాయింపు రూపం :

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)
0 - 20	6
20 - 40	10
40 - 60	18
60 - 80	12
80 - 100	4
	N = 50

ఇచ్చిన దత్తాంశంలో 20 అనే విలువ ఉంటే దానిని రెండవ తరగతిలోను, 40 అనే విలువ ఉంటే దానిని మూడవ తరగతిలోను చేర్చుతారు.

2. విలీన రూపం (**Inclusive form**) : ఈ పద్ధతిలో ఒక తరగతి ఎగువ అవధి తరువాత తరగతి దిగువ అవధికి సమానంగా ఉండదు. ఇందువల్ల ఒక చలరాశిలోని విలువలను వివిధ తరగతులకు కేటాయించడంలో ఎలాంటి సందేహాలు రావు. ఈ పద్ధతిలో ఒక తరగతి ఎగువ అవధికి సమానమైన విలువను ఆ తరగతిలోనే విలీనం చేయడం జరుగుతుంది. అందువల్ల దీనికి విలీనం రూపం అనేపేరు వచ్చింది. ఉదాహరణకు, కింది పౌనఃపున్య విభాజనాన్ని గమనించండి.

విలీన రూపం :

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)
0 - 19	6
20 - 39	10
40 - 50	18
60 - 79	12
80 - 99	4
	N = 50

ఇచ్చిన దత్తాంశంలో 19 అనే విలువ ఉంటే దానికి 0-19 తరగతిలోను, 39 అనే విలువ ఉంటే దానిని 20 - 39 అనే తరగతిలోను తీసుకుంటారు. అయితే చలరాశి విలువలు పూర్ణాంకాలలో లేనట్లయితే వాటిని ఒకటి లేదా రెండు దశాంశ స్థానాల వరకు సవరించి తరగతి అవధులను 0 - 19.9, 20 - 39.9, 49 - 59.9 అని గాని, 0 - 19.99, 20 - 39.99, 40 - 59.99 అనిగాని చూపాలి.

విలీన రూపంలో తెలుపబడిన తరగతి అంతరాలను మినహాయింపు రూపంలోకి మార్చడం ద్వారా తరగతి అవధుల్లో అవిచ్ఛిన్నతను చేకూర్చాలి. దీనికిగాను ఒక తరగతి ఎగువ అవధికి, దాని తరువాత తరగతి దిగువ అవధికి గల తేడాను కనుగొనాలి. దానిని రెండుతో భాగించితే సవరణ కారకం విలువ వస్తుంది. ఈ సవరణ కారణాన్ని ప్రతి తరగతి దిగువ అవధినుండి తీసివేసి, ఎగువ అవధికి కూడితే మార్పు చేసిన మినహాయింపు రూపంలోకి తరగతులు వస్తాయి. ఈ విధంగా విలీన రూపంలో తెలుపబడి 4 - 59, 6 - 79 అనే తరగతులు మినహాయింపు రూపంలో 39.5 - 59.5, 59.5 - 79.5 అనే తరగతులుగా రాయబడతాయి.

3. ఇతర రూపాలు : తరగతి అవధులను ఈ రెండు రూపాలలోనే గాక మరో ఐదురూపాలలో కూడా చూపుతారు. వాటిని గురించి కింది వివరించడం జరిగింది.

1) కంటే తక్కువ రూపం : **(Less than form)** తరగతి అవధులలో ఎగువ అవధిని మాత్రమే ఉపయోగించి దత్తాంశ వివరాలు రాస్తే దానిని 'కంటే తక్కువ రూపం' అంటారు. ఇది ఒక నిర్దిష్ట విలువకన్నా తక్కువ విలువ గల మొత్తం అంశాల సంఖ్యకు సంబంధించిన సమాచారం ఇస్తుంది. ఏ చలరాశిలోనైనా కంటె తక్కువ సంచిత పౌనఃపున్యం పొందాలంటే ఆ చలరాశికి ముందున్న తరగతుల పౌనఃపున్యాలతో ఆ చలరాశి పౌనఃపున్యం కలిపి చూపాలి. కింది ఉదాహరణలను పరిశీలించండి.

కంటె తక్కువ రూపం

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)
20 కంటె తక్కువ	6
40 కంటె తక్కువ	16
60 కంటె తక్కువ	34
80 కంటె తక్కువ	46
100 కంటె తక్కువ	50

20 కంటె తక్కువ మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థులు 6 గురు ఉన్నారు. 40 కంటె తక్కువ మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థులు 16గురు ఉన్నారు. అదేవిధంగా 60 కంటె తక్కువ మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థులు 34 మంది ఉన్నారని ఈ పట్టిక తెలుపుతుంది.

2) కంటె ఎక్కువ రూపం **(More than form)** : తరగతి అవధులలో దిగువ అవధిని మాత్రమే ఉపయోగించి దత్తాంశ వివరాలు రాస్తే దానిని 'కంటే ఎక్కువ రూపం" అంటారు. ఇది ఒక నిర్దిష్ట విలువకన్న ఎక్కువ విలువ గల మొత్తం అంశాల సంఖ్యకు సంబంధించిన సమాచారం ఇస్తుంది. ఏ చలరాశి కైనా "కంటె ఎక్కువ' సంచిత పౌనఃపున్యం పొందాలంటే ఆ చలరాశి తరువాత ఉన్న తరగతుల పౌనఃపున్యాలతో ఆ చలరాశి పౌనఃపున్యం కలిపి చూపాలి. దీనికి దిగువ ఉదాహరణను గమనించండి.

కంటె ఎక్కువ రూపం

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (cf)
0 కంటె ఎక్కువ	50
20 కంటె ఎక్కువ	44
40 కంటె ఎక్కువ	34
60 కంటె ఎక్కువ	16
80 కంటె ఎక్కువ	4

సున్నాకంటె ఎక్కువ మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థులు 50 మంది ఉన్నారు. 20 కంటె ఎక్కువ మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థులు 44 మంది ఉన్నారు. అదేవిధంగా 40 కంటె ఎక్కువ మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థులు 34 మంది ఉన్నారని ఈ పట్టిక తెలుపుతుంది.

3) వివృతాంత తరగతుల అంతరాలు **(Open end class Intervals)** : వివృతాంత తరగతులలో మొదటి తరగతి దిగువ అవధి, చివర తరగతి ఎగువ అవధి విలువలు తెలియవు. ఒక నిర్దిష్ట ఎగువ అవధి విలువకు లోపు అన్ని అంశాలను కలిగిన తరగతి లేదా ఒక నిర్దిష్ట దిగువ అవధి విలువకు పైన అన్ని అంశాలను కలిగిన తరగతిని వివృతాంత తరగతి అంటారు. కింది ఉదాహరణను పరిశీలించండి.

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)
20కి లోపు	6
20 - 40	10

40 - 60	18
60 - 80	12
80 కి పైన	4
	N = 50

ఈ ఉదాహరణలో '20' కి లోపు అనే తరగతి '0 - 20' అనే అర్థం కలిగించదు. అలాగే '80 పైన' అనే తరగతి '80 - 100' అనే అర్థం కలిగించదు. ఈ విధమైన తరగతులను వివృతాంత తరగతులు అంటారు. ఖాళీ దత్తాంశానికి తరగతి అంతరాలను నిర్ణయించేటప్పుడు, ఎక్కువ సంఖ్యలో తరగతులను ఏర్పాటు చేయవలసినప్పుడు వివృతాంత తరగతులను ఉపయోగించడం తప్పనిసరి అవుతుంది.

4) మధ్య విలువ రూపం : తరగతి అవధులు ఇవ్వకుండా వాటి మధ్య విలువలతో కూడా వివరాలను చూపుతారు. మధ్య విలువ ప్రతి తరగతి ఎగువ, దిగువ అవధులకు మధ్యస్థంగా ఉంటుంది. తరగతికి బదులుగా ఆ తరగతికి ప్రాతినిధ్యం వహించే ప్రత్యామ్నాయ సంఖ్యను మధ్య విలువ అంటారు. ప్రతి తరగతి మధ్య విలువను ఆ తరగతి దిగువ, ఎగువ అవధుల సగటుగా తీసుకుంటారు. ఈ క్రింది ఉదాహరణను పరిశీలించండి.

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)
10	6
30	10
50	18
70	12
90	4
	N = 50

మధ్య విలువలను కలిగిన పౌనఃపున్య విభజనం నుండి నిజతరగతులు గల పౌనఃపున్య విభాజనాలను కనుక్కోవడానికి వరుసగా ఉండే ఏ రెండు మధ్య విలువల తేడానైనా తరగతి అంతరంగా తీసుకోవాలి. దానిని రెండుచే భాగించి వచ్చిన ఫలితాన్ని ప్రతిమధ్య విలువకు, కూడితే ఎగువ అవధి, తీసివేస్తే దిగువ అవధి వస్తాయి. ఇక్కడ 10కి 30కి తేడా 20 ÷ 2 = 10. 10 - 10 = 0, 10 + 10 = 20 అనగా 0 - 20 మొదటి తరగతి అలాగే 30 - 10 = 20, 30 + 10 = 40 అనగా 20 - 40 రెండవ తరగతి. ఇదేవిధంగా మిగిలిన తరగతుల ఉజ్జాయింపు చేయవచ్చు.

5) అసమాన తరగతి అంతరాలు : కొన్ని సందర్భాలలో అసమాన తరగతి అంతరాలలో దత్తాంశం ఇవ్వడం జరుగుతుంది. వివిధ తరగతులలో దత్తాంశాన్ని వర్గీకరించేటప్పుడు అన్ని తరగతుల అంతర పరిమాణం సమానంగా ఉండకపోవచ్చు. ఆ విధమైన తరగతులను అసమాన తరగతులు అంటారు. కింద ఉదాహరణను గమనించండి.

అసమాన తరగతి అంతరాలు

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)
0 - 35	14
35 - 50	11
50 - 60	9
60 - 75	9
75 - 100	7
	N = 50

అవిచ్ఛిన్న పౌనఃపున్య విభాజనం తయారు చేసే పద్ధతి :

1. దత్తాంశంలోని అత్యధిక, అత్యల్ప విలువల సహాయంతో వ్యాప్తిని (R) కనుగొనాలి.
2. వర్గీకరణ ఉద్దేశాన్ని లేదా స్టర్జస్ సూత్రాన్ని బట్టి తరగతుల సంఖ్యను నిర్ణయించాలి.
3. వ్యాప్తిని తరగతుల సంఖ్యచే భాగించి తరగతి అంతరం నిర్ణయించాలి.
4. తరగతి అవధులు 2 లేదా 5 గుణిజాలుగా ఉండేలా నిర్ణయించాలి.
5. ఇచ్చిన విలువలలో ఒక్కొక్కటి తీసుకొని అది ఏ తరగతికి చెందుతుందో ఆ తరగతికి ఎదురుగా గణ చిహ్నాల శీర్షికలో ఒక గణ చిహ్నం గీయాలి. ఒక తరగతి ఎదురుగా గీయవలసిన ప్రతి ఐదవ గణ చిహ్నాలను ఖండించేటట్లు గీయాలి.
6. ప్రతి తరగతికి ఎదురుగా గల గణ చిహ్నాలను లెక్కించి, ఆ తరగతి అంతరానికి సంబంధించిన పౌనఃపున్యాన్ని కనుక్కోవాలి.

3.2 దత్తాంశ పట్టికీకరణ

ఉపోద్ఘాతం : గుణాంక విచారణలో సేకరించిన దత్తాంశం విశ్లేషణకు విపులీకరణకు నేరుగా పనికిరాదు. పెద్ద పరిమాణంలో ఉన్న దత్తాంశాన్ని వర్గీకరణ పద్ధతుల ద్వారా క్లుప్తీకరించడం జరుగుతుంది. ఈ క్లుప్తీకరించిన దత్తాంశాన్ని సులభంగా అర్థం చేసుకోవడానికి, పోల్చడానికి వీలుగా దొంతులలోను, పంక్తులలోను పొందుపరచాలి. కుదించిన దత్తాంశాన్ని శాశ్వత రూపంలో దొంతులలోను, పంక్తులలోను ఒక పట్టి రూపంలో పొందుపరచడానికి పట్టీకరణ అంటారు.

"ఒక విషయానికి చెందిన పరిమాణాత్మక దత్తాంశాన్ని దొంతులలో, పంక్తులలో దత్తాంశపు పూర్తి అర్థం, దానిమూలం విశదం చేసేటట్లు శీర్షికలు, సూచనలు రూపంలో తగిన వివరణ, వర్ణన పదజాలంలో క్రమరూపంలో జాబితా చేయడమే పట్టికరణ అని ఉటెల్ వివరించాడు. దీనిని బట్టి దత్తాంశాన్ని ఒక పట్టిరూపంలో పొందుపరచాలంటే ముందుగా ఆ దత్తాంశాన్ని వర్గీకరణ చేయాలని గమనించాలి. కానీ నిజానికి వర్గీకరణ, పట్టికరణ వేర్వేరు పద్ధతులు కావు. ఇవి పరస్పర పూరకాలైన రెండు సోపానాలు మాత్రమేనని గ్రహించాలి. అంటే వర్గీకరణ లేనిదే పట్టికరణ లేదు. పట్టికరణ లేనిదే వర్గీకరణకు ఒక పరిపూర్ణత రాదు.

3.2.2 పట్టిలోని భాగాలు : ఒక పట్టిలో ఎన్నిభాగాలు ఉండాలి అనే విషయం దత్తాంశ స్వభావం మీది, విచారణ ఉద్దేశం మీద ఆధారపడి ఉంటుంది. సాధారణంగా ఒక మంచి పట్టిలో కింది ముఖ్య భాగాలుండాలి.

1. పట్టిసంఖ్య : సులభంగాను, శీఘ్రంగాను గుర్తించడానికి, వీలుగా ప్రతి పట్టికి ఒక నెంబరు ఇవ్వాలి. ఇది పట్టిపై భాగంలో, పేజీ మధ్యలో ఉండాలి.
2. పట్టి పేరు : ప్రతి పట్టిక ఒక పేరు ఇవ్వాలి. ఆ పేరు క్లుప్తంగాను స్వయం ప్రబోధకంగాను ఉండాలి. పట్టిలో ఏ దత్తాంశాన్ని చూపించిందీ తెలపాలి. పట్టిలో దత్తాంశం ఏ కాలానికి చెందినది, దానిని ఎవరు సేకరించింది. తెలపాలి. పట్టిపేరు పట్టిక ఎగువ భాగంలో రాయాలి.
3. శీర్షికలు : పట్టి నిలువు గీతల పై భాగంలో రాసిన పదాలను శీర్షికలు అంటారు. ఇవి ప్రతి నిలువు వరుసలో అమర్చిన దత్తాంశాన్ని గూర్చి విశదీకరిస్తాయి. వివిధ నిలువు వరుసలు వివిధ యూనిట్లలో వ్యక్తం చేసినట్లయితే, ఆ యూనిట్లు శీర్షికలలోనే చూపాలి. అవసరమైతే ఉప శీర్షికలను ఏర్పాటు చేయాలి.
4. స్టబ్స్ : ఒక పట్టిలో పూర్తిగా ఎడమ పక్కన అడ్డు వరుసల మీద ఉండే పదాలను 'స్టబ్స్' అంటారు. ఇవి ప్రతి అడ్డువరుస మీద అమర్చి ఉండే విషయాన్ని గూర్చి వివరిస్తాయి. స్టబ్‌లు సాధారణంగా శీర్షికలు కంటే పెద్దవిగా ఉంటాయి. ప్రతి స్టబ్ స్పష్టంగాను, స్వయం ప్రబోధకంగాను ఉండాలి.
5. ప్రధాన భాగం : ఇది పట్టిలో అత్యంత ప్రధానమైనది. పూర్తి దత్తాంశ సారం ఈ భాగంలోనే ఉంటుంది. అందువల్ల అసందర్భమైనటువంటి, అవసరమైనటువంటి వివరాలను వదలివేసి, ముఖ్యమైన విషయాలను యదార్థత దెబ్బతినకుండా ఒక క్రమ

పద్ధతిలో పట్టిలోని ప్రధాన భాగంలో చేర్చాలి. దత్తాంశాన్ని పట్టి ప్రధాన భాగంలో అకారాది క్రమంలో గాని, భౌగోళిక క్రమంలో, కాలాను క్రమంలో, పరిమాణాను క్రమంలో లేదా సాంప్రదాయక క్రమంలో గాని అమర్చాలి.

6. ముఖ్యగమనిక : పట్టిలోని విషయాన్ని గురించి సంగ్రహంగా బోధపరిచే ఒక వాక్యాన్ని ముఖ్యగమనిక అంటారు. సాధారణంగా దీనిని పట్టిపేరు క్రింద బ్రాకెట్లలో రాస్తారు. దీనిని పట్టి ఎగువ భాగంలో కుడిప్రక్క మూలకూడా రాస్తారు. ఇది పట్టి పేరులో, శీర్షికలలో లేదా స్టబ్స్‌లో పొందుపరచని విషయాన్ని గురించి చెబుతుంది. గణాంక ప్రమాణాలను గురించి సాధారణంగా ముఖ్య గమనికలో తెలుపుతారు. ఉదాహరణకు, 'ఆదాయం వేలరూపాయలలో', 'జనాభా కోట్లలో', ఎగుమతులు మిలియన్ టన్నులలో అని సూచిస్తారు.

7. పాదసూచిక : పట్టిలో మినహాయించిన ఏదైనా ఒక విషయాన్ని గురించి పట్టిక కింది భాగంలో ఒక పదంలో గాని, వాక్య రూపంలో గాని చెప్పడానికి ఉద్దేశించబడినదే పాదసూచిక, సాధారణంగా పాదసూచికలను దత్తాంశంలో సందిగ్ధత ఉన్నప్పుడు, ప్రత్యేక పరిస్థితులవల్ల దత్తాంశం ప్రభావితమైనప్పుడు, దత్తాంశాలు అసంగతాలుగ ఉన్నప్పుడు ఉపయోగిస్తారు. పాదసూచికలను అంకెలతో లేదా వివిధ రకాల చూపుతారు.

8. దత్తాంశ మూలం : పట్టిలో చూపిన దత్తాంశాన్ని ఇతర వనరుల నుండి తీసుకుంటే, ఆ దత్తాంశపు మూలాన్ని గురించి పట్టిక కింది భాగంలో పాదసూచిక కింద చూపాలి. దీని వలన అవసరమైతే అసలు దత్తాంశామూలాన్ని తెలిపేటప్పుడు గ్రంథకర్తపేరు, పుస్తకం, ప్రచురణకర్తపేరు ప్రచురణ తేది, సంపుటం సంఖ్య, సంచిక సంఖ్య, పేజీ సంఖ్య మొదలగునవి తెలపాలి.

నమూనా పట్టి - D

పట్టి సంఖ్య

పట్టి పేరు

ముఖ్య గమనిక

స్టబ్స్	శీర్షికలు				
	1	2	3	4	మొత్తం
స్టబ్ - 1 స్టబ్ - 2 స్టబ్ - 3 స్టబ్ - 4	అంశాల ప్రధాన భాగం				
మొత్తం					

పాద సూచిక : దత్తాంశ మూలం

3.2.3 పట్టికరణ సూత్రాలు : దత్తాంశాన్ని సంక్షిప్తం చేయడం, తారతమ్యానికి వీలు కల్పించడం పట్టికరణ ముఖ్యోద్దేశం. దత్తాంశాన్ని పట్టికరణ చేయడానికి ఖచ్చితమైన సూత్రాలు ఏమీలేవు. దత్తాంశ స్వభావాన్ని, విచారణ పరిధిని దృష్టిలో ఉంచుకొని పట్టిలను తయారు చేయడం జరుగుతుంది. మంచి గణాంక పట్టిని తయారు చేయడం ఒకకళ. "అనుభవమన్నది పట్టికరణకు ముఖ్య ఉపాధ్యాయుడు" అని బౌలీ చెప్పాడు. ఎక్కువ స్థలం ఆక్రమించకుండా ఎక్కువ వివరాలు అందించడం మంచి గణాంక పట్టి లక్షణం. పట్టి తయారు చేసే వారికి దత్తాంశాన్ని గూర్చి చక్కని పరిజ్ఞానం ఉంది. ఏ విషయాలకు ప్రాధాన్యత ఇవ్వాలో తెలిసి ఉండాలి.

(i) ఉపయోగాన్ని బట్టి పట్టికరణ : పట్టిలో పొందుపరచిన దత్తాంశం దేనికి ఉపయోగపడుతుందనే దానిని బట్టి పట్టిలను రెండురకాలుగా వర్గీకరిస్తారు.

ఎ. సాధారణ ఉపయోగ పట్టిలు : ఈ పట్టిలలో దత్తాంశం తాలుకు పూర్తి వివరాలు ఉంటాయి. ఇందులో వివరాలను సాధారణ వాడుకకు అవసరమైనప్పుడు త్రిప్పి చూసుకోవడానికి ఉపయోగిస్తారు. అందువల్ల ఈ పట్టిలను 'సంప్రదింపు పట్టిలు' అంటారు. ఈ

పట్టిలు వివరాలనిచ్చే ఖజానాగా (Repository) పనిచేయడం వలన వీటిని 'ఖజానా పట్టిలు' అని కూడా అంటారు. వివిధ ప్రభుత్వ ఏజెన్సీలు ప్రచురించే పట్టిలు వీటికి ఉదాహరణలు.

బి. ప్రత్యేక ఉపయోగ పట్టిలు : సాధారణ ఉపయోగ పట్టిలలోని ఒకటి లేదా కొన్ని నిర్దిష్ట విషయాలను గురించి నొక్కి చెప్పడం కోసం ప్రత్యేక ఉపయోగ పట్టిలు తయారు చేస్తారు. ఈ పట్టిలలోని విషయాలను సాధారణ ఉపయోగ పట్టి నుండి వ్యుత్పన్నం (derivative) చేయడం జరుగుతుంది. కాబట్టి వీటిని 'వ్యుత్పన్న పట్టిలు' లేదా 'సారాంశపు పట్టిలు' అంటారు. ఈ పట్టిలు సమాచారాన్ని శాతాలు సగటులు, నిష్పత్తులలో చూపుతాయి. ఇది సాధారణ ఉపయోగ పట్టిలోని ఏదో ఒక నిర్దిష్ట విషయాన్ని విపులీకరిస్తాయి. అందువల్ల వాటిని 'విపులీకరణ పట్టిలు' అనికూడా అంటారు.

(ii) అంశాల లక్షణాలను బట్టి పట్టికరణ : పట్టిలో అమర్చి ఉన్న దత్తాంశంలోని అంశాల లక్షణాలను బట్టి పట్టిలను మరోవిధంగా రెండురకాలుగా విభజిస్తారు.

ఎ) సామాన్య పట్టిలు **(Simple Tables)** : దత్తాంశంలోని అంశాల తాలూకు ఒకే ఒక లక్షణాన్ని వర్ణించే పట్టిని 'సామాన్య పట్టి' అని లేదా 'ఏక మార్గపట్టి' అని అంటారు. ఒక పట్టి ఒక లక్షణానికి సంబంధించిన ఒకటిగాని, అంతకంటె ఎక్కువగాని స్వతంత్రమైన ప్రశ్నలకు జవాబులను ఇస్తుంది. భారతదేశంలోని జనాభాను మతం రీత్యా వర్గీకరణ చేస్తే ఏకమార్గ పట్టి వస్తుంది.

మతం రీత్యా భారతదేశ జనాభా

మతం	జనాభా (కోట్లలో)
హిందువులు	
మహమ్మదీయులు	
క్రైస్తవులు	
సిక్కులు	
మొత్తం	

ఈ పట్టిక భారతదేశ జనాభాకు చెందిన మతం అనే ఒక లక్షణాన్ని గురించి తెలుపుతుంది. ఈ పట్టి భారతదేశంలో హిందువులు ఎంతమంది? మహమ్మదీయులు ఎంతమంది? అనే స్వతంత్ర ప్రశ్నలకు జవాబులను ఇస్తుంది.

బి) సంకీర్ణ పట్టిలు (Complex Tables) : దత్తాంశంలోని అంశాల తాలుకు రెండు లేదా అంతకంటె ఎక్కువ లక్షణాలను గురించి వర్ణించే పట్టిలను సంకీర్ణ పట్టిలు అని అంటారు. వీటిని మూడు రకాలుగా పేర్కొంటారు.

i) ద్విమార్గ పట్టీలు : దత్తాంశములోని అంశాల తాలూకు రెండు లక్షణాలను గురించి వర్ణించే పట్టీని ద్విమార్గ పట్టీ అంటారు. ఈ పట్టీ రెండు పరస్పరాధార ప్రశ్నల సమూహాలకు జావాబులు ఇస్తుంది. భాగతదేశంలోని జనాభాను మతం, లింగ భేదం రీత్యా పట్టీకరిస్తే ద్విమార్గ పట్టీ వస్తుంది.

మత, లింగ భేదం రీత్యా భారతదేశ జనాభా (జనాభా కోట్లలో)

	లింగ భేదం		
మతం	పురుషులు	స్త్రీలు	మొత్తం
హిందువులు			
మహమ్మదీయులు			
క్రైస్తవులు			
సిక్కులు			
ఇతరులు			
మొత్తం			

ఈ పట్టీ భారతదేశ జనాభాకు చెందిన మతం, లింగభేదం అనే రెండు లక్షణాలను గురించి తెలుపుతుంది. భారతదేశంలోని హిందువుల సంఖ్య ఎంత? ఆ హిందువులలో పురుషులు లేదా స్త్రీలు ఎంతమంది? అనే రెండు పరస్పరాధార ప్రశ్నలకు జవాబులను ఇస్తుంది.

ii) త్రిమార్గ పట్టీలు : దత్తాంశంలోని అంశాల తాలూకా మూడు లక్షణాలను గురించి వర్ణించే పట్టీని త్రిమార్గ పట్టీ అంటారు. ఈ పట్టీ మూడు పరస్పరాధార ప్రశ్నల సమూహాలకు జవాబులు ఇస్తుంది. భారతదేశంలోని జనాభాను మతం, లింగభేదం, అక్షరాస్యత రీత్యా పట్టీకరిస్తే త్రిమార్గ పట్టీ వస్తుంది.

మతం, లింగభేదం, అక్షరాస్యత రీత్యా భారతదేశ జనాభా

(జనాభా కోట్లలో)

మతం	పురుషులు	స్త్రీలు మొత్తం
	అ.రా / ని.రా / మొత్తం	అ.రా / ని.రా / మొత్తం అ.రా / ని.రా / మొత్తం
హిందువులు		
మహమ్మదీయులు		
క్రైస్తవులు		
సిక్కులు		
ఇతరులు		
మొత్తం		

అ = అక్షరాస్యులు ని = నిరక్షరాస్యులు

ఈ పట్టీ భారతదేశ జనాభాకు చెందిన మతం, లింగభేదం, అక్షరాస్యత అనే మూడు లక్షణాలను గురించి తెలుపుతుంది. ఈ పట్టీ భారతదేశంలోని హిందువులు ఎందరు? ఆ హిందువులలో పురుషులు లేదా స్త్రీలు ఎందరు? ఆ హిందూ పురుషులు లేదా స్త్రీలలో అక్షరాస్యులు లేదా నిరక్షరాస్యులు ఎందరు? అనే మూడు పరస్పరాధార ప్రశ్నలకు జవాబులు ఇస్తుంది.

iii) బహువిధ పట్టీలు : దత్తాంశములోని అంశాల తాలూకు నాలుగు లేదా అంతకంటె ఎక్కువ లక్షణాలను గురించి వర్ణించే పట్టీని బహువిధ పట్టీ అంటారు. ఈ పట్టీ నాలుగు, లేదా అంతకంటె ఎక్కువ పరస్పరాధార ప్రశ్నల సమూహాలకు జవాబులనిస్తుంది. భారతదేశంలోని జనాభాను మతం, లింగభేదం, అక్షరాస్యత, నివాసస్థానం రీత్యా పట్టీకరిస్తే బహువిధ పట్టీ వస్తుంది.

మతం, లింగభేదం, అక్షరాస్యత, నివాస స్థానం రీత్యా భారతదేశ జనాభా

(జనాభా కోట్లలో)

మతం	పురుషులు			స్త్రీలు			మొత్తం		
	అ.రా	ని.రా.	మొత్తం	అ.రా	ని.రా.	మొత్తం	అ.రా	ని.రా.	మొత్తం
	RU	RU	RU	RU	RU	RU	RU	RU	R U
హిందువులు									
మహమ్మదీయులు									
క్రైస్తవులు									
సిక్కులు									
ఇతరులు									
మొత్తం									

అ.రా = అక్షరాస్యులు R = గ్రామీణులు మొత్తం

ని.రా = నిరక్షరాస్యులు U = పట్టణవాసులు

పట్టీ భారతదేశ జనాభాకు చెందిన మతం, లింగబేధం, అక్షరాస్యత, నివాసస్థానం అనే నాలుగు లక్షణాలను గురించి తెలుపుతుంది. ఈ పట్టీ భారతదేశంలోని హిందువులు ఎందరు? వారిలో పురుషులు ఎందరు? పురుషులలో అక్షరాస్యులలో గ్రామీణ ప్రాంతాలలో నివసించేవారు ఎందరు? అనే నాలుగు పరస్పర సంబంధం గల ప్రశ్నలకు జవాబులనిస్తుంది.

3.3 చిత్రపటాలు

3.3.1 ఉపోద్ఘాతం : సేకరించిన దత్తాంశాన్ని సంక్షిప్త పరచి, క్రమపద్ధతిలో సమర్పణ చేయడానికి సహాయపడే వర్గీకరణ, పట్టీకరణ ప్రక్రియలను గూర్చి తెలుసుకున్నాం. అయితే ఈ రెండు ప్రక్రియలు దత్తాంశాన్ని అర్ధవంతంగా విపులీకరించుకొనడానికి సాధారణ వ్యక్తికి అంతగా ఉపయోగపడవు.

పట్టి రూపంలో ఉన్న అంకెలను జాగ్రత్తగా పరిశీలించడం అనేది కంటికి అలసటను, మనస్సుకు చికాకును కలిగిస్తుంది. గుణాంక నిపుణత లేని సాధారణ మానవుడు అంకెలు అందించే సందేశాన్ని అందుకొనడం, దానిని గుర్తుంచుకొని పోల్చడం అనేది దుర్లభం. అందువలన గుణాంక ఫలితాలను నమ్మకంగాను, ఆకర్షణీయంగాను సమర్పణ చేయడానికి చిత్రపటాలు, రేఖాచిత్రాలు తగిన సాధనాలు.

పి.యల్. బౌలీ అంకెల ప్రభావాన్ని గూర్చి చర్చిస్తూ "అంకెల జాబితా పొడుగు పెరిగే కొద్దీ అదే స్పష్టత కోల్పోతుంది. పది అంకెలు గల శ్రేణిని/బహుశ అతి సులభంగా అర్ధం చేసుకోవచ్చు. ఇరవై అంకెలు గల శ్రేణిని కొంచెం ప్రయత్నంలో అర్ధం చేసుకోవచ్చు కాని. వరుసగా శతాబ్ద సంవత్సరాలకు సంబంధించిన అంకెల జాబితాను చూస్తే మనకు ఏవి బోధపడదు. అడవిలోని వృక్షాలన్నింటిని చూసినంత మాత్రంచేత వాటిలో ఉన్న కలప లక్షణం గురించి మనకు ఏమి తెలుస్తుంది? అని అన్నాడు."

అంటే అంకెల సంఖ్య పెరుగుతూ ఉండేకొలది, వాటిని అవగాహన చేసుకొనే శక్తి తగ్గుతుంది. అంకెలతో నిమిత్తం లేకుండా చిత్రపటాలను, లేదా రేఖాచిత్రాలను చూసిన వేంటనే దత్తాంశసారం బోధపడుతుంది. ఇవి ఆకర్షణీయంగాను, ఆసక్తిని కలుగచేసేవిగాను ఉంటాయి. అందువల్లనే ఆధునిక యుగంలో వీటిని పారిశ్రామిక - వాణిజ్య పాలనారంగాలలో విరివిగా వాడుతున్నారు.

3.3.2 ఏక పరిమాణ చిత్రాలు (బార్ పటాలు) : వీటిని బార్‌పటాలని' కూడా అంటారు. వాటిని గీయడం సులభం. అందుకే బాగా వాడుకలోకి రావడం జరిగింది. బార్ అంటే ఒక దట్టమైన గీత. బార్ పటాలలో బార్‌ల పొడవు అంశాల పరిమాణాన్ని చూపుతుంది. బార్‌ల వెడల్పును చిత్రాలను ఆకర్షణీయంగా చేయడానికి చూపుతారు. అందువలన బార్‌ల వెడల్పుకు కొలత పరిమాణంతో ఎటువంటి సంబంధం ఉండదు. బార్‌లను గీయడంలో ఈ క్రింది జాగ్రత్తలు తీసుకోవాలి.

ఎ) అన్ని బార్‌ల వెడల్పులు సమానంగా ఉండాలి మరీ ఎక్కువగా, మరీ తక్కువగా ఉండకూడదు.

బి) ఒక బార్‌కు, మరో బార్‌కు మధ్య ఖచ్చితమైన ఖాళీ వదలి చిత్రపటం నిర్మించాలి.

సి) బార్‌లు నిలువుగాగానీ, అడ్డంగాగానీ నిర్మించాలి. అంశాలను పోల్చుటకు నిలువుగా బార్‌లను నిర్మిచండం అనుకూలం.

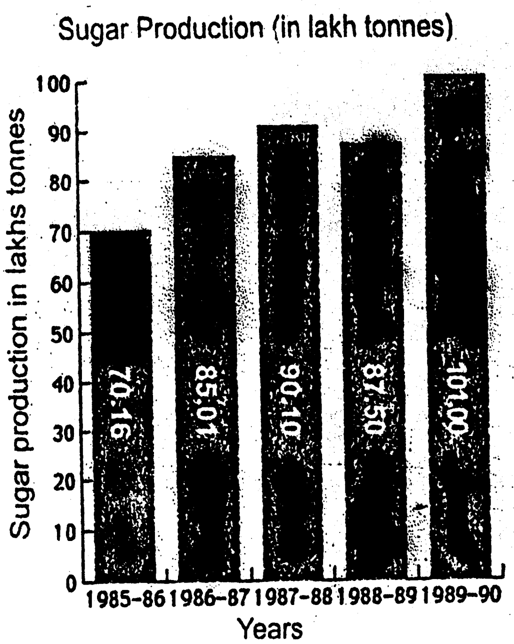
డి) ప్రతి అంశానికి ఒక బార్‌ను నిర్మించి, బార్‌పై భాగాన వాని విలువను చూపాలి ఇలా చూపడం వలన చదువరులకు సులభంగా అర్ధమవుతుంది.

1) సాధారణ బార్ పటం : ఒక అంశం మాత్రమే పటం ద్వారా చూపడానికి సాధారణ బార్‌పటాలను ఉపయోగిస్తారు. ప్రతి అంశం పరిమాణం లేదా విలువను బార్ పొడవులతో గుర్తిస్తారు. కాలశ్రేణి దత్తాంశాన్ని ఇచ్చినట్లయితే దత్తాంశంలోని వివిధ విలువలను వాటి కాలక్రమ రీతిలో ప్రదర్శిస్తారు. ఈ బార్ పటాన్ని నిర్మించడం తేలిక. అర్ధం చేసుకోవడం సులభం. కాని దీని ఉపయోగం ఒకే ఒక అంశానికి సంబంధించిన దత్తాంశాన్ని ప్రదర్శించడానికి మాత్రమే పరిమితం అవుతుంది.

ఉదా : 1 కింది దత్తాంశం నుండి తగిన చిత్రపటాన్ని గీయండి.

సంవత్సరాలు :	1985 - 86	1986 - 87	1987 - 88	1988 - 89	1989 -90
చక్కెర ఉత్పత్తి : లక్షల టన్నుల	70.6	85.01	90.10	87.50	101.00

జవాబు : చక్కెర ఉత్పత్తి కింద సాధారణ బార్‌పటం ద్వారా చూడవచ్చు.



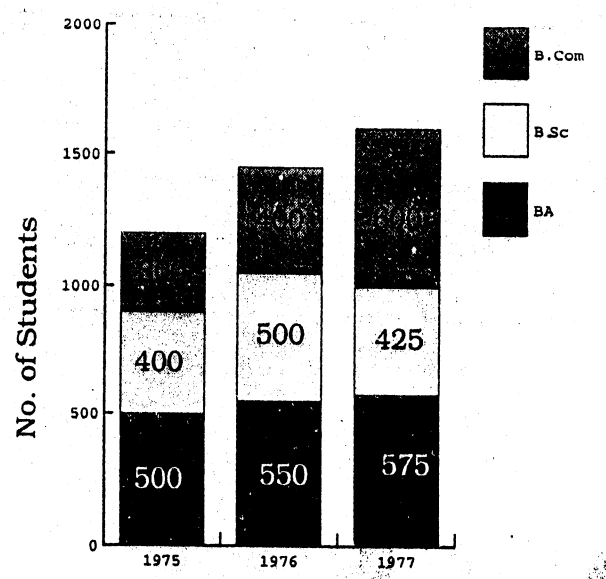
2) ఉప విభాజిత బార్‌పటం : దత్తాంశంలోని వివిధ భాగాలను ఒకే బార్‌లో చూపించడానికి ఈ విధమైన బార్‌పటాలను గీస్తారు. ఈ పటాన్ని 'అంశాల బార్‌పటం' అని కూడ అంటారు. వివిధ భాగాలను వేరుగా చూపడానికి వివిధ ఛాయలను గాని, రంగులను గాని ఉపయోగిస్తారు. సాధారణంగా అత్యధిక విలువగల అంశాన్ని, ఆధారరేఖ వద్ద చూపి మిగిలిన అంశాలను వాటి విలువల క్రమంలో చూపాలి.

ఉదా 2 : దిగువ యిచ్చిన ఒక కళాశాలలోని విద్యార్థులను తెలియజేస్తూ బార్ పటాన్ని నిర్మించండి.

సంవత్సరం	1975	1976	1977
బి.ఎ.	500	550	575
బి.యస్సి.	400	500	425
బి.కాం.	300	400	600
మొత్తం	1200	1450	1600

జవాబు : పై దత్తాంశం కింద ఉపవిభాజిత బార్ పటం ద్వారా చూపబడింది.

Faculty wise Student population in a College



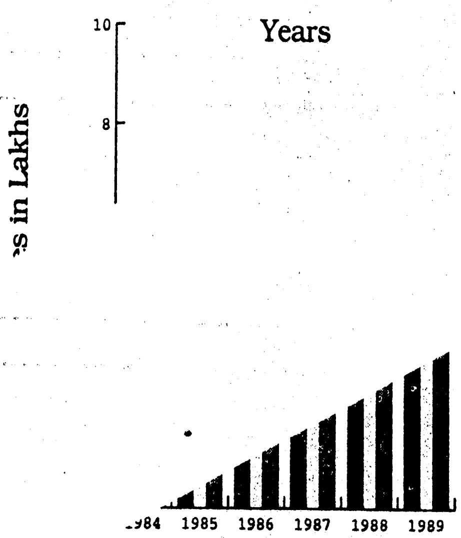
3) బహుళ బార్ పటం : దత్తాంశంలోని అంతర సంబంధం ఉన్న రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ అంశాల దత్తాంశపు తేదీలను చూపడానికి వాడుతారు. ఇందులో ఒక బార్ ప్రక్కనే మరో బార్ గీస్తారు. ఈ బహుళ బార్ పటం నిర్మాణం సాధారణ బార్‌పటాల మాదిరిగానే ఉంటుంది. ఒకే ఒక అంశానికి సంబంధించిన దత్తాంశాన్ని చూపడానికి సాధారణ బార్ పటాన్ని ఉపయోగిస్తే, బహు బార్ పటాన్ని, రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ అంశాల దత్తాంశాన్ని చూపడానికి ఉపయోగిస్తారు.

ఉదా 3: కింది దత్తాంశాన్ని తగిన బార్ పటంలో చూపండి.

సంవత్సరాలు	1984	1985	1986	1987	1988	1989
స్కూటర్స్	2.97	4.22	5.95	6.26	6.63	8.50
మోటార్ సైకిల్స్	1.75	2.48	3.14	3.01	4.12	4.21
మోపెడ్స్	3.77	4.55	4.50	4.76	4.74	4.26

ద్విచక్ర వాహనాల పెరుగుదల వివరాలు పై పట్టిలో లక్షల సంఖ్యలో ఇవ్వబడినవి.

జవాబు : ద్వి చక్ర వాహనాల పెరుగుదల వివరాలను దిగువ ఇచ్చిన బహు



4) శాతపు బార్ పటం : శాతపు ఉప విభాజిత బార్‌పటాలను దత్తాంశంలోని సాపేక్ష మార్పులను సులభంగా గమనించడానికి వాడతారు. బార్ పొడవును వంద యూనిట్లుగా విభజిస్తారు. ప్రతి బార్‌ను అంశాల శాతాలను బట్టి విభజించాలి. ఈ బార్ పటాలు గణితపరమైన లెక్కలు చేయవలసి వచ్చినప్పుడు నిర్మించడం జరిగింది.

ఉదా : దిగువ ఇచ్చిన దత్తాంశాన్ని శాతపు బార్ పటంగా నిర్మించండి. 1981, 1986 సంవత్సరంలో ఒక కుర్చీని తయారు చేయడానికి అయిన మొత్తం ఖర్చు, అమ్మకం ధర, లాభనష్టాల వివరాలు కింది విధంగా ఉన్నాయి.

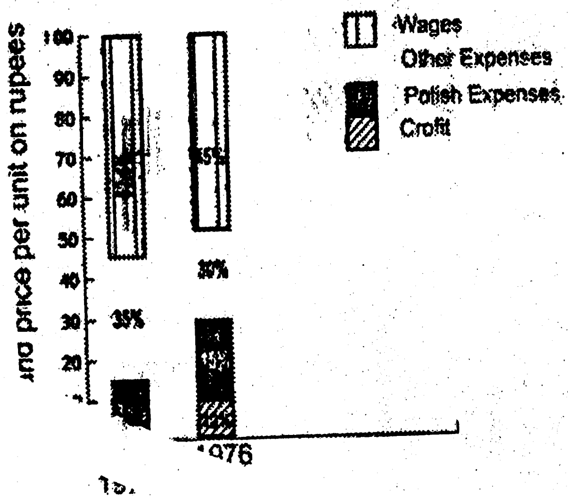
వివరాలు	1971 రూ	1976 రూ
వేతనాలు	21.00	45.00
ఇతర ఖర్చులు	14.00	30.00
పాలిష్ ఖర్చులు	7.00	15.00
మొత్తం ఖర్చులు	42.00	90.00
అమ్మకం ధర	40.00	100.00
లాభం/నష్టం	- 2.00	+ 10.00

జవాబు : వస్తువు యూనిట్ అమ్మకం ధర 100గా పరిగణిస్తూ ఇతర అంకెలకు శాతాలను కిందివిధంగా గణన చేయాలి.

వివరాలు	1971 %	1976 %
వేతనాలు	52.5	45.0
ఇతర ఖర్చులు	35.0	30.0
పాలిష్ ఖర్చులు	17.5	15.0
మొత్తం ఖర్చులు	105.0	90.0
అమ్మకం ధర	100.0	100.0
లాభం / నష్టం	- 5.00	+ 10.0

పైన చూపిన దత్తాంశాన్ని కింద శాతాల బార్‌పటం ద్వారా సమర్పించడమైనది.

Corts orices - profile - percnai



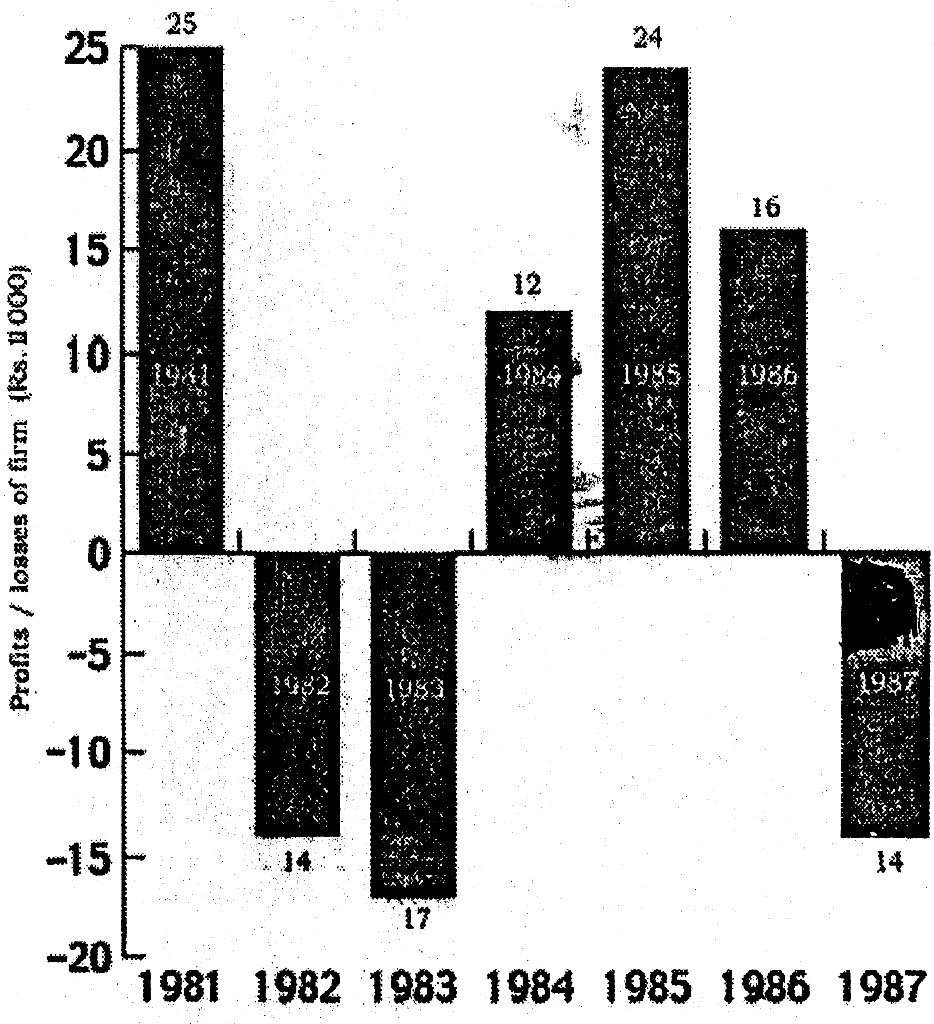
v) విచలన బార్ పటం : విచలన బార్ పటాలు దత్తాంశపు సంఖ్యలలో గల తేడాలను మాత్రమే చూపడానికి వాడుతారు. ఇందులో బార్‌లకు ధనాత్మక, ఋణాత్మక విలువలు ఆధార రేఖకు దిగువను చూపుతారు. ఉదాహరణకు, నికర లాభాలు, నికర నష్టాలను, అనుకూల వ్యాపార నిల్వ, ప్రతికుల వ్యాపార నిల్వలను చూపుతారు. విటినే 'ద్విపక్ష బార్‌లని' కూడా అంటారు.

ఉదా 5 : ఒక వ్యాపార సంస్థ కొన్ని సంవత్సరాల పాటు అర్జించిన లాభనష్టాలు కింద ఇవ్వబడినవి. దీనిని సరియైన చిత్రపటంలో చూపండి.

సంవత్సరం	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
లాభం / నష్టం వేల (రూ)	+ 25	- 14	- 17	+ 12	+ 24	+16	-14

జవాబు : ఒక వ్యాపార సంస్థ ఆర్జించిన లాభనష్టాలును కింద విచలన బార్ పటం ద్వారా చూడవచ్చు.

Profits and losses of firm (Rs.1000)



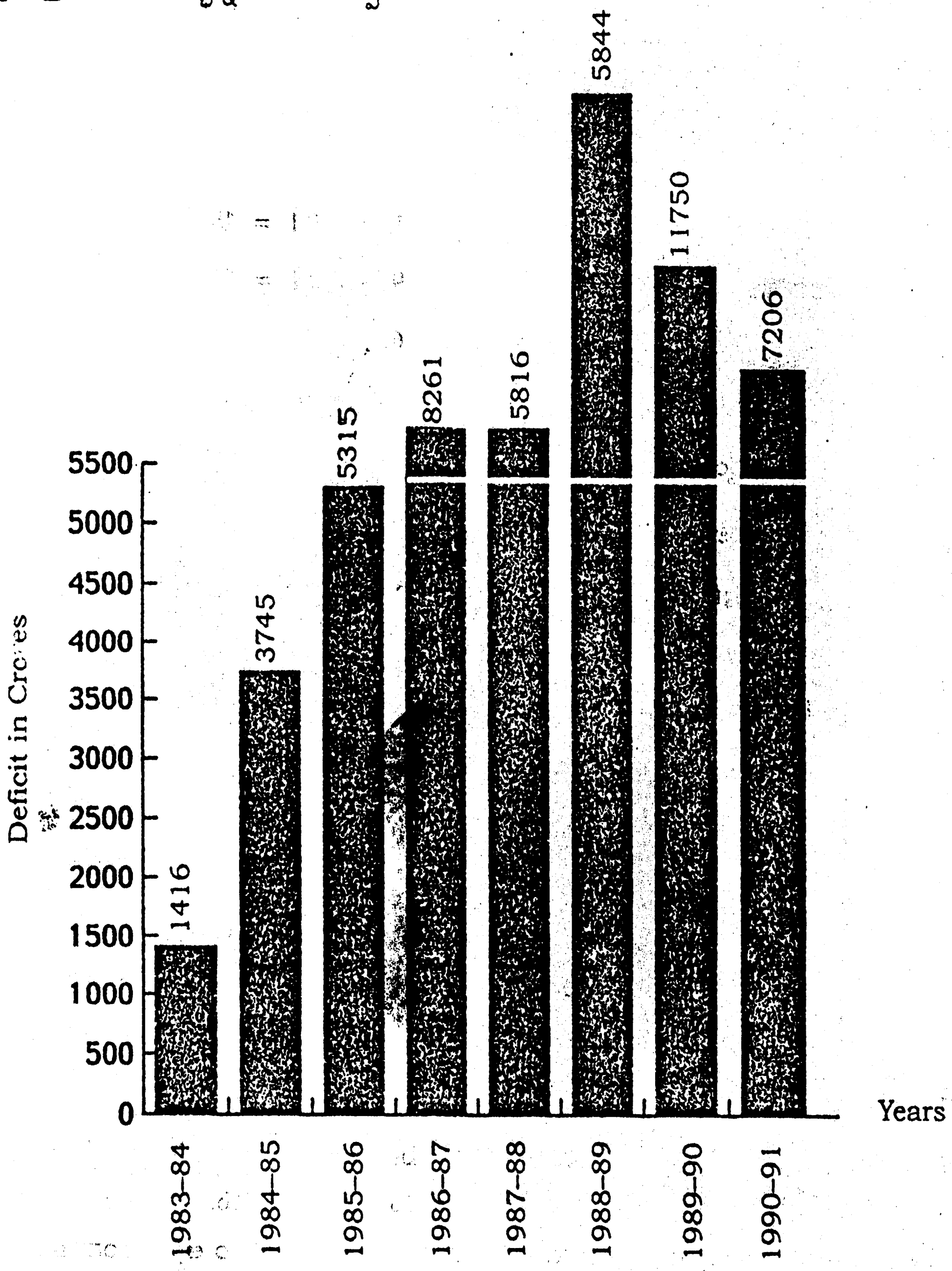
4

vi) విచ్ఛిన్న బార్ పటాలు : కొన్ని శ్రేణులలో విలువల మధ్యతేడా చాల ఎక్కువగా ఉంటుంది. చిన్న విలువలను, పెద్దవిలువలను ఒకే చిత్ర పటంలో చూపడం కొంచెం కష్టమవుతుంది. ఒక్కొక్క విలువకు ఒక్కొక్క బార్ గీస్తారు. తక్కువ విలువలను ఖచ్చితంగానే బార్‌లలో చూపుతారు. కాని ఎక్కువ విలువల చూపడానికి కొంత వరకు బార్‌ను పొడిగించి చూపి తరువాత వానిపై ఒక చిన్నబార్ గీసి విలువలను గుర్తిస్తారు. ఇటువంటి బార్‌లను "విచ్ఛిన్న బార్"లు అంటారు.

ఉదా 6: దిగువ యిచ్చిన దత్తాంశాన్ని తగిన చిత్రపటంలో చూపండి

సంవత్సరాలు :	1983-84	1984-85	1985-86	1986-87	1987-88	1988-89	1989-90	1990-91
బడ్జెట్‌లోటు :	1.416	3,745	5,315	8.261	5816	5844	11750	7206

జవాబు : పై దత్తాంశం కింద విచ్ఛిన్న బార్‌పటం ద్వారా చూపబడింది.



3.3.3 వృత్తాలు లేదా పై రేఖాచిత్రాలు : దత్తాంశంలోని వివిధ అంశాలను లేదా భాగాలను చూపడానికి వృత్తాలను వాడతారు వృత్త వైశాల్యం వ్యాసార్ధ వర్గానికి అనుపాతంగా ఉంటుంది. వివిధ విలువల వర్గమూలాలను కనుగొని విడివిడిగా వృత్తాలను గీస్తారు. చూపవలసిన

వివిధ అంశాల పరిమాణాన్ని వృత్త వైశ్యాలంలో చూపుతారు. ఈ పై చార్టులలో అంశాల మొత్తం విలువను 360^0 కు సమానంగా తీసుకొని, దత్తాంశంలోని వివిధ అంశాలను డిగ్రీలుగా మార్చి వృత్తాన్ని గీయాలి. మొట్టమొదట అత్యధిక విలువ గల అంశాలను పైనచూపి, మిగిలిన అంశాలను సవ్య దిశపద్ధతిని (Clock wise) ఒక క్రమంలో చూపాలి.

ఉదా 9 : ఒక పారిశ్రామిక పెట్టుబడి సంస్థ ఆస్తుల వివరాలు 1988 మార్చి 31 నాటికి క్రింది విధంగా ఉన్నవి. వాటిని తగిన చిత్రపటాలలో చూపండి.

ఆస్తుల వివరాలు :	రుణాలు	పెట్టబడులు	స్థిరాస్తులు	చరాస్తులు	ఇతర ఆస్తులు
విలువ (కోట్ల రూ॥)	1500	900	600	400	200

జవాబు : ఆస్తుల వివరాలను డిగ్రీలలోకి క్రింది విధంగా లెక్కించడం జరిగింది.

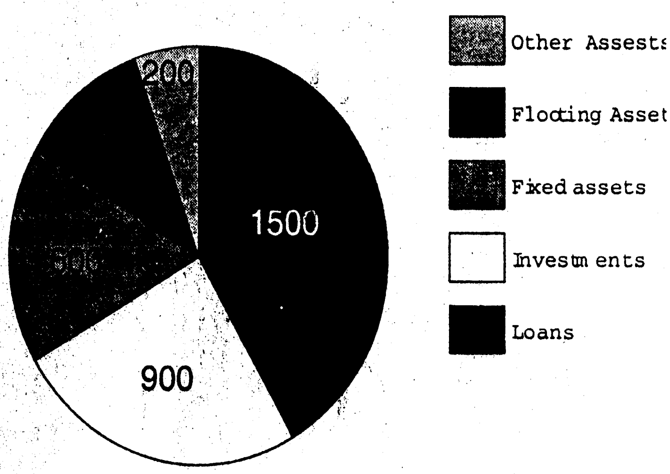
$$\text{డిగ్రీలు} = \frac{360^0}{\text{మొత్తం ఆస్తులు}} = \frac{360}{3600} = 0.1$$

ఆస్తుల వివరాలు 360^0 విలువ డిగ్రీలలో

రుణాలు	$1500 \times 0.1 = 150^0$
పెట్టుబడులు	$900 \times 0.1 = 90^0$
స్థిర ఆస్తులు	$600 \times 0.1 = 60^0$
నికర ఆస్తులు	$400 \times 0.1 = 40^0$
మొత్తం	360^0

డిగ్రీలలో మార్చిన దత్తాంశాన్ని క్రింది పటం ద్వారా చూడవచ్చు.

Assest distributing of an Industrial financing Pins



3.4 రేఖా చిత్రాలు

3.4.1 ఉపోద్ఘాతం : గణాంక శాస్త్రంలో దత్తాంశాన్ని సమర్పణ చేయడానికి చిత్రపటాలతో పాటు రేఖాచిత్రాలు కూడా ఎక్కువ వాడుకలో ఉన్నాయి. స్పష్టమైన లేదా భౌగోళికమైన దత్తాంశాన్ని చూపడానికి చిత్రపటాలను వాడతారు. కాని కాల శ్రేణులను, పౌనఃపున్య విభాజనాలను చూపడానికి రేఖచిత్రాలను అనుకూలంగా ఉంటాయి. వీటిని చిత్రపటాలలో చూపడం అర్ధవంతంగా ఉండదు. బృహత్ పరిమాణంలో వున్న సంఖ్యా దత్తాంశాన్ని సులభంగా అర్ధం చేసుకోవడానికి రేఖలలోను, వక్రాలలోను వర్ణించడాన్ని రేఖాపట్ల సమర్పణ అంటారు.

ఒక పట్టిలోని కదనంకంటె ఒక రేఖా గమనం మనస్సు మీద శక్తివంతమైన ప్రభావం చూపుతుంది. ఈ రేఖాచిత్రాలు పెద్ద పరిమాణంలోని దత్తాంశాన్ని సంక్షిప్తం చేసి, దానికి ఒక సుందర రూపాన్ని కలుగజేస్తాయి.

3.4.2 పౌనఃపున్య విభాజన రేఖా చిత్రాలు : పౌనఃపున్య విభాజనాలను రేఖా చిత్రాలలో గుర్తిస్తే పౌనఃపున్య విభాజనాలను పోల్చి వ్యత్యాసాలను అధ్యయనం చేయడానికి ఈ చిత్రాలు ఉపయోగపడతాయి. పౌనఃపున్య విభాజన రేకా చిత్రాలను నాలుగు రకాలుగా వర్గీకరిస్తారు. ఎ) సోపాన చిత్రం, బి) పౌనఃపున్య బహుభుజి; సి) సరస పౌనఃపున్య వక్రం; డి) సంచిత పౌనఃపున్య వక్రం. విచ్ఛిన్న పౌనఃపున్య విభాజనానికి కూడా రేఖా చిత్రాలు గీయవచ్చు. ఇవి సాధారణంగా సరళరేఖా చిత్రంలో గాని బార్ పౌనఃపున్య రేఖా చిత్రంలో గాని చూపడం జరుగుతుంది. ప్రతి చలరాశి విలువపై దాని పౌనఃపున్యానికి అనుపాతంలో ఒక సరళ రేఖను గీయాలి. ఒక సరళరేఖకు, మరొక సరళరేఖకు మధ్య ఖాళీ వదలాలి దీనిని 'సరళరేఖా పౌనఃపున్య చిత్రం' అంటారు. ప్రతి చలరాశి మీద ఒక సరళరేఖను గీయడానికి బదులు బార్‌ను గీస్తే దానిని 'బార్ పౌనఃపున్య చిత్రం' అంటారు.

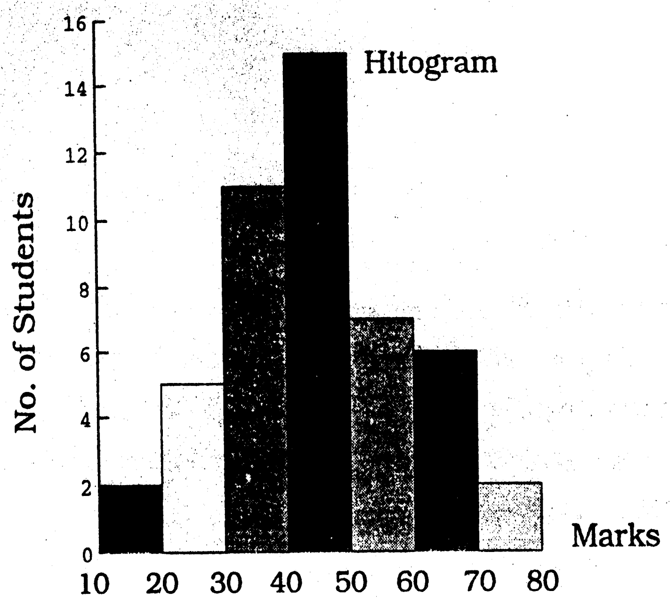
3.4.3 సోపాన చిత్రం : X - అక్షంపై తరగతి అంతరాలను, Y - అక్షంపై సాధారణ పౌనఃపున్యాలను గుర్తించి పౌనఃపున్య విభాజనంలోని ప్రతి ఒక్క తరగతికి ఒక్కొక్క దీర్ఘచతురస్రం గీయగా ఏర్పడినదే సోపాన చిత్రం అవుతుంది. ఇక్కడ వివిధ తరగతుల దీర్ఘచతురస్రాలను గ్రాఫ్ కాగితం మీద ప్రక్కప్రక్కనే నిర్మిస్తారు. సోపాన చిత్రాన్ని రెండు రకాలుగా గీస్తారు.

i) సమాన తరగతి అంతరాలు గల పౌనఃపున్య విభాజనానికి సోపాన చిత్రం : ఇచ్చిన పౌనఃపున్య విభాజనంలో తరగతి అంతరాలు సమానంగా ఉంటే సోపాన చిత్రంలోని దీర్ఘచతురస్రాల వెడల్పు తరగతి అంతరాలకు వాటి ఎత్తు ఆయా తరగతి పౌనఃపున్యాలకు సమానంగా ఉంటాయి. ఈ చిత్రంలోనిదీర్ఘ చతురస్రాలను ప్రక్క ప్రక్కన ఆసన్నంగా అమర్చడం వలన సోపానాల వలె కన్పిస్తాయి. కావున దీనిని సోపాన చిత్రం అంటారు. ఒక సోపాన చిత్రం అది చూపే మొత్తం పౌనఃపున్యానికి అనుపాతంలో ఉంటుంది ప్రతి దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం అది చూపే తరగతి పౌనఃపున్యానికి సమానంగా ఉంటుంది. సోపాన చిత్రం నుండి బహుళకాన్ని లెక్కించవచ్చు. దీనికోసం పొడవైన బార్‌ను బహుళకపు బార్‌గా తీసుకోవాలి. ఆ బార్ దిగువ అవది పై మూలనుండి కుడివైపు ఉన్న బార్ దిగువ అవది పై మూలకి విక్ర్ణంగా రేఖను గీయాలి. అదే విధంగా బహుళకపు బార్. ఎగువ అవధి పై మూల నుండి ఎడమవైపు ఉన్న బార్ ఎగువ అవదిపై మూలకు విక్ర్ణంగా గీయాలి. ఇవి ఖండించుకొన్న బిందువు నుండి X - అక్షానికి లంబరేఖ గీస్తే అది - అక్షాన్ని ఏ బిందువు వద్ద తాకుతుందో ఆ విలువ బహుళకంగా గుర్తించాలి.

ఉదా 20 : కింది దత్తాంశం నుండి సోపాన చిత్రాన్ని గీయండి.

మార్కులు	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60-70	70 - 80
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	5	11	15	7	6	2

జవాబు : సోపాన చిత్రాన్ని వెనుక పేజిలో చూపడమైంది.



19

ii) అసమాన తరగతి అంతరాలు గల పౌనఃపున్య విభాజనానికి సోపాన చిత్రం : ఇచ్చిన పౌనఃపున్య విభాజనంలోని తరగతి అంతరాలు అసమానంగా ఉంటే సోపాన చిత్రం గీయడానికి ముందుగా పౌనఃపున్య విభాజనాన్ని సరిదిద్ది రాసుకోవాలి. అంటే ప్రతి తరగతికి పౌనఃపున్య సాంద్రతను. అంచనా వేయాలి దీనికోసం ఇచ్చిన అన్ని తరగతి అంతరాలలో ఏది తక్కువ తరగతి అంతరమో దానిని ఏంపిక చేయాలి, దానిని బట్టి మిగిలిన తరగతి అంతరాలు దానికి ఎన్నిరెట్లు ఉన్నాయో లెక్కించి, ఆ రెట్లు సంఖ్యచేత వాటి పౌనఃపున్యాలను భాగించితే వచ్చినదే పౌనఃపున్య సాంద్రత అవుతుంది. ఉదాహరణకు ఒక తరగతి అంతరం కనిష్ట తరగతి అంతరానికి రెండు రెట్లు ఉంటే ఆ తరగతి పౌనఃపున్యాన్ని (రెండుచే భాగిస్తే పౌనఃపున్య సాంద్రత వస్తుంది. ఒక తరగతి అంతరం కనిష్ట తరగతి అంతరానికి మూడురెట్లు ఉంటే ఆ తరగతి పౌనఃపున్యాన్ని) మూడుచే భాగిస్తే దాని పౌనఃపున్య సాంద్రత వహిస్తుంది. ఈవిధంగా పౌనఃపున్యాన్ని సమాన తరగతులుగా వచ్చేటట్లు రూపొందించుకొని గతంలో వలెనే సోపాన చిత్రాన్ని గీయాలి.

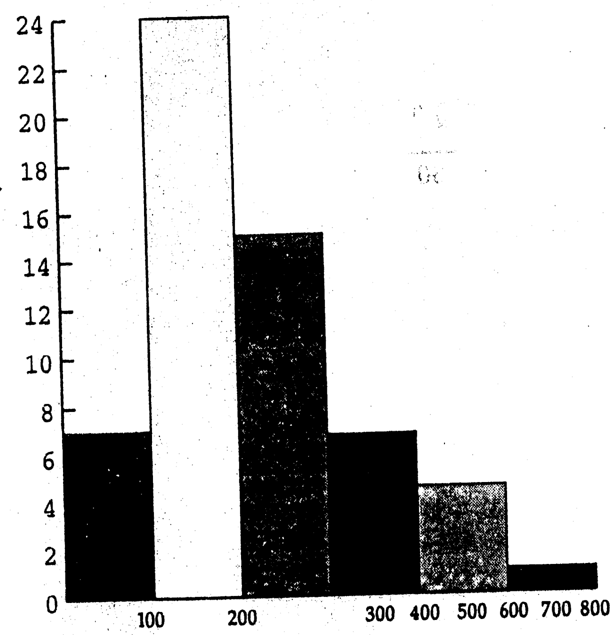
ఉదా 21 :

0 - 50	50 - 100	100 - 200	200 - 400	400 - 600	600 - 800
7	24	30	27	18	4

$$\text{పౌనఃపున్య సాంద్రత సూత్రం} = \frac{\text{తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము}}{\text{తరగతి అంతరం యూనిట్లు}}$$

తరగతి :	0 - 50	50 - 100	100 - 200	200 - 400	400 - 600	600 - 800
పౌనఃపున్యం :	7	24	30	27	18	4
పౌనఃపున్య సాంద్రత	7	24	15	6.75	4.5	1

అసమాన తరగతులకు సోపాన చిత్రం



3.4 పౌనఃపున్య బహుభుజి : ఒకే గ్రాఫ్ కాగితంపై రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ పౌనఃపున్య బహుభుజిలను పోల్చడానికి వీలుంటుంది. పౌనఃపున్య విభాజనాన్ని ఇది అవిచ్ఛిన్న వక్రరేఖ ద్వారా చూపిస్తుంది. అందువలన ఇది సోపాన చిత్రం కంటె మెరుగైన పద్ధతి ఈ బహుభుజిని సోపాన చిత్రం నుండి గాని మధ్య విలువల నుండిగాని నిర్మించవచ్చు.

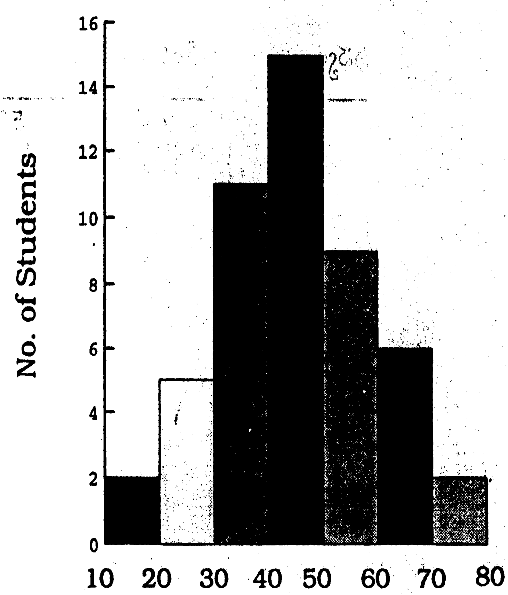
i) సోపాన చిత్రం నుండి పౌనఃపున్య బహుభుజి నిర్మించడం : సోపాన చిత్రాన్ని నిర్మించిన తరువాత దీర్ఘచతురస్రాలకు పైభాగన మధ్య బిందువులను గుర్తించి సరళ రేఖల ద్వారా మధ్య బిందువులను కలపాలి. ఆవిధంగా వచ్చిన రేఖల సమూహాము పౌనఃపున్య బహుభుజి అంటారు. పౌనఃపున్య బహుభుజి వైశ్యాల సోపాన చిత్ర వైశాల్యానికి సమానంగా ఉండాలంటే దీని రెండు చివరలను ఆధార రేఖ వరకు పొడిగించాలి. దానికి గాను మొదటి తరగతికి ముందు ఒక తరగతిని, చివరి తరగతికి తరువాత ఒక తరగతిని తీసుకోవాలి. ఈ రెండు తరగతుల మధ్య విలువల వరకు బహుభుజిల చివరలను పొడిగించాలి.

ఉదా 22 : ఈ క్రింది దత్తాంశానికి సోపాన చిత్రాన్ని, పౌనఃపున్య బహుభుజిని గీయండి.

మార్కులు :	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	5	11	15	9	6	2

జవాబు : సోపాన చిత్రం ద్వారా నిర్మించిన బహుభుజి

Histogram and frequency Polygen



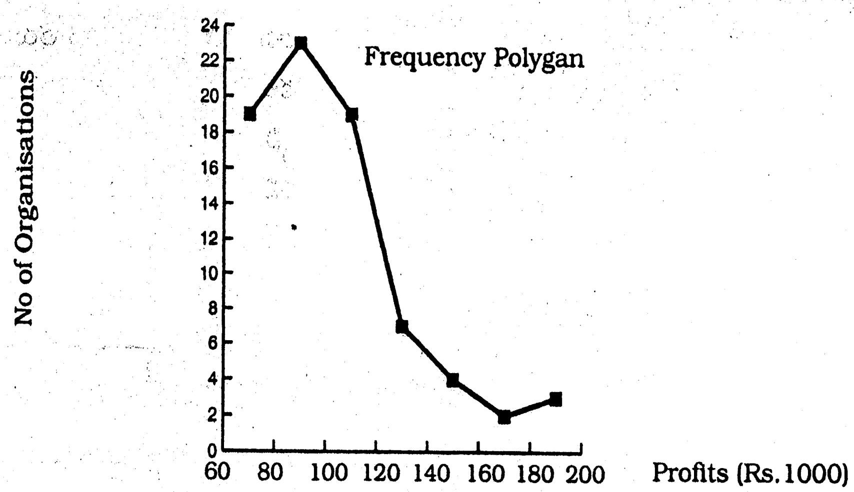
ii) మధ్య బిందువుల నుండి పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మంచడం : ఇచ్చిన తరగతులకు మధ్య విలువలను కనుగొని, గ్రాఫ్ కాగితం మీద X - అక్షంపై గుర్తించిన మధ్య బిందువులకు, Y - అక్షంపై గుర్తించిన వాటి అనురూప పౌనఃపున్యాలకు బిందువులను గుర్తించాలి. ఈ బిందువులను సరళరేఖతో కలపాలి. ఈ బహుభుజి చివరలను, ఆధారరేఖ వరకు పొడిగించాలి. ఈవిధంగా వచ్చినదే పౌనఃపున్య బహుభుజి.

ఉదా 23: సోపాన చిత్రం లేకుండా పౌన: బహుభుజి గీయుము.

లాభం (వేల రూ.)	60-80	80-100	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200
సంస్థల సంఖ్య	10	23	19	7	4	2	3

జవాబు : ఈ దత్తాంశాన్ని చూపే పౌనఃపున్య బహుభుజి కింద ఇవ్వడమైంది.

3.4.5 సరస పౌనఃపున్య వక్రరేఖ : పౌనఃపున్య బహుభుజి వివిధ బిందువుల గుండా ఒక నున్నని వక్రాన్ని గీస్తే సరస పౌనఃపున్య వక్రం వస్తుంది. ఇట్లా గీసేటప్పుడు పౌనఃపున్య వక్ర వైశాల్యం, బహుభుజి వైశాల్యానికి సమానంగా ఉండేటట్లు చూడాలి. ఈ వక్రాన్ని గీసేటప్పుడు దత్తాంశంలోని ముఖ్య విషయాలను విస్మరించకుండా ఆకస్మిక ఒడిదుడుకులను తొలగించాలి బహుభుజిలోని ఎత్తయిన బిందువుకు పైగా గంటాకారంలో ఉండేవిధంగా గీయాలి. అంతేగాక మొదటి తరగతి దిగువ అవధికి, చివరి తరగతి ఎగువ అవధికి ఈ సరస పౌనఃపున్య

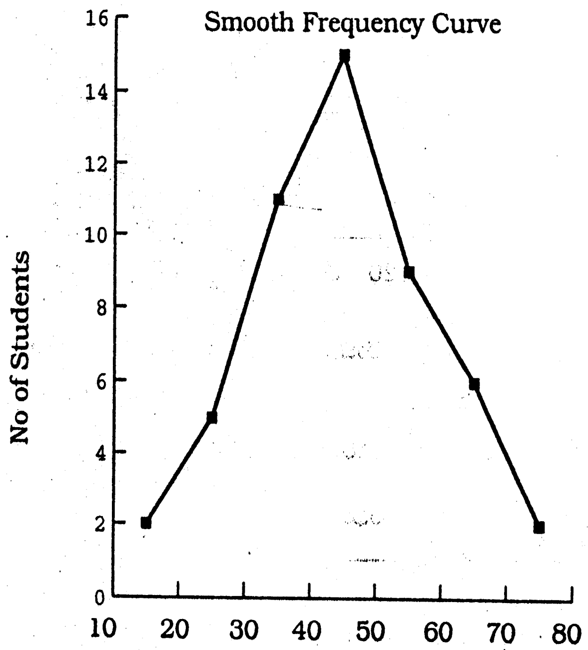


వక్రాన్ని ఆధార రేఖవద్ద కలపాలి. ఇలా చేయడంలో ఇంచుమించు సమిష్టి స్వరూపాన్ని గ్రహించగలం ఇది బహుభుజివలె సరళరేఖలతో కలిపింది కాదు. ఒకే గీతతో స్వేచ్ఛగా గీసిన రేఖా సరస పౌనఃపున్య వక్రరేఖ.

ఉదా 24 : దిగువ దత్తాంశం నుండి సరస పౌనఃపున్యం వక్రరేఖను గీయండి.

మార్కులు	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 -50	50 - 60	60 - 70	70 -80
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	5	11	15	9	6	2

జవాబు : దత్తాంశాన్ని కింది సరస పౌనఃపున్యంలో చూపడమైనది.



సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖ : సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖలను 'ఓజివ్ వక్రరేఖలు' అని కూడా అంటారు. ఈ ఓజివ్ వక్రరేఖలు రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ చలరాశులను పోల్చడానికి ఉపయోగపడతాయి. ఈ రేఖలు మధ్యగతం, చతుర్థాంశాలు దశాంశాలను నిర్ణయించడానికి ఉపయోగపడతాయి. ఈ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖలు నిర్ణీత విలువకంటె ఎక్కువ గల అంశాల సంఖ్యఎంత? నిర్ణీత విలువ కంటె తక్కువ విలువ అంశాల సంఖ్య ఎంత? అనే ప్రశ్నలకు జవాబును యిస్తాయి. సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖల నిర్మాణానికి రెండుపద్ధతులున్నాయి అవి:

i) కంటె తక్కువ పద్ధతి : ఈ పద్ధతిలో అత్యల్ప తరగతి విలువ నుండి అత్యధిక తరగతి విలువ వరకు పౌనఃపున్యాలను సంచితం చేస్తారు. ఇటువంటి సంచిత పౌనఃపున్యాన్ని ఆరోహణ లేదా 'కంటె తక్కువ" సంచిత పౌనఃపున్యం అని అటారు. తరగతి అవధులను X - అంక్షపైన, సంచిత పౌనఃపున్యాలను Y - అక్షంపైన గుర్తిస్తారు. తరగతి ఎగువ అవధులపై తక్కువ సంచిత పౌనఃపున్యాలను గుర్తించి వాటిని సరళరేఖలలో కలిపితే క్రమంగా పెరుగుతున్న వక్రరేఖ వస్తుంది. దానిని కంటె తక్కువ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖ అంటారు.

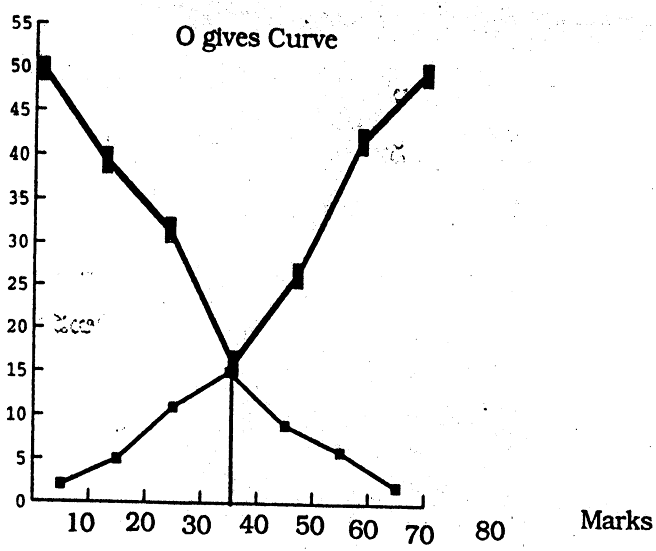
ii) కంటె ఎక్కువ పద్ధతి : ఈ పద్ధతిలో అత్యధిక తరగతి విలువ నుండి అత్యల్ప తరగతి విలువ వరకు పౌనఃపున్యాలను సంచితం చేస్తారు. ఇంటువంటి సంచిత పౌనఃపున్యాన్ని, అవరోహణ లేదా అవధులను సంచిత పౌనఃపున్యం అంటారు. తరగతి అవధులను X - అక్షంపై, సంచిత పౌనఃపున్యాలను Y - అక్షంపైన గుర్తిస్తారు. తరగతి దిగువ అవధులపై కంటె ఎక్కువ సంచిత పౌనఃపున్యాలను గుర్తించి వాటిని సరళరేఖలతో కలిపితే క్రమంగా తగ్గుతున్న వక్రరేఖ వస్తుంది. దీనిని కంటె ఎక్కువ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖ అంటారు.

ఓజివ్ వక్రరేఖలను శాతంలో కూడా గీయవచ్చు. అటువంటప్పుడు వాటిని సంచిత శాతపు వక్రరేఖలు అంటారు. రెండు దత్తాంశాలను తారతమ్యం చేయాలంటే సరస పౌనఃపున్య వక్రం కంటె, సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖల ఖండన బిందువు నుండి - అక్షానికి లంబరేఖను గీయగా అది X - అక్షాన్ని తాకిన బిందువును మధ్యగతంగా గుర్తించాలి.

ఉదా 25: కింది దత్తాంశం నుండి ఓజివ్ వక్రరేఖలను గీసి, మధ్యగతాన్ని లెక్కించండి.

మార్కులు	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 -80
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	5	11	15	9	6	2

జవాబు : ఈ దత్తాంశాన్ని కింద సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖల ద్వారా చూపడమైంది.



3.4.5 చిత్రపటాలకు, రేఖచిత్రాలకు గల భేదాలు :

చిత్ర పటాలకు రేఖా చిత్రాలకు కింద భేదాలున్నాయి.

i) రేఖచిత్రాల నిర్మాణానికి సాధారణంగా గ్రాఫ్ కాగితం ఉపయోగిస్తారు కాని చిత్రపటాలను తెల్లకాగితం మీద నిర్మిస్తారు.

ii) రేఖచిత్రాలు వివిధ చలరాసుల మధ్య గణితీయ సంబంధాన్ని అధ్యయనం చేయడానికి ఉపయోగపడతాయి. కాని చిత్రపటాలు చలరాశుల మధ్య గణితీయ సంబంధాన్ని వెల్లడించలేవు.

iii) రేఖాచిత్రాలు గణాంక శోధకునకు గణాంక విశ్లేషణలో ఉపయోగపడతాయి. కాని చిత్రపటాలు రేఖాచిత్రాల కంటె ఆకర్షణీయంగా ఉండడం వలన ప్రచారాలకు ప్రకటనలకు బాగా అనువుగా ఉంటాయి.

iv) రేఖా చిత్రీకరణలో అంతర్వేశన (Interpolation) బహిర్వేశన పద్ధతుల (Extrapalation)ను ఉపయోగించి తెలియని విలువలను అంచనా వేయవచ్చు. కాని చిత్రపటాలు అంతర్వేశన, బహిర్వేశనలకు ఉపకరించవు.

v) రేఖా చిత్రాలను కాలశ్రేణులు, పౌనఃపున్య విభాజనాలను వర్ణించడానికి ఉపయోగిస్తారు. కాని చిత్రపటాలను అంశాలతో కూడుకొని ఉన్న భౌగోళిక సంబంధమైన దత్తాంశ సమర్పణకు ఉపయోగిస్తారు.

vi) చిత్రపటాల నిర్మాణం కంటె రేఖాచిత్రాల నిర్మాణం చాలా సులభం.

అభ్యాసము

I. ఈ క్రింది వానికి సంక్షిప్తంగా జవాబులు రాయండి.

1. శేణికరణ అనగానేమి ?
2. పట్టీకరణ అనగానేమి?
3. విచ్ఛిన్న, అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు అనగానేమి?
4. సాధారణ పట్టిక, సంకీర్ణ పట్టిలకు గల తేడాలేవి?
5. బహుళ బార్ పటాన్ని వివరించండి.
6. సోపాన చిత్రం అనగానేమి?
7. పై పటం అంటే ఏమిటి?
8. ఓజివ్ వక్రరేఖలను వివరించండి.

II. ఈ క్రింది వానికి విపులంగా జవాబుల్లు రాయండి.

1. పౌనఃపున్య విభాజనాన్ని రూపొందించే సూత్రాలను విపులీకరించండి.
2. గణాంక పట్టికరణ అనగానేమి? ఖాళీపట్టీని గీచి, ఆ పట్టీలోని వివిధ భాగాలను వర్ణించండి.
3. పౌనఃపున్య విభాజనాన్ని రేఖాచిత్రంలో చూపడానికి గల పద్ధతుల గురించి వివరించండి.
4. కింది దత్తాంశం నుండి తరగతి అంతరం 4, ఒకానొక తరగతి మధ్య విలువ సున్నగా ఉండే విధంగా అవిచ్ఛిన్న శ్రేణిని నిర్మించండి.

-8	-7	10	12	6	4	3	0	7	-4	-2
2	3	4	7	5	6	10	12	-9	13	11
-10	-7	1	0	5	3	2	6	-10	-6	-4
- 3										

జవాబు : (5 - 4 - 4 - 10 - 4 - 7)

5. కింది దత్తాంశం నుండి తరగతి అంతర పరిమాణం 4 గా తీసుకొని విలీన పద్ధతిలో పౌనఃపున్య విభాజనాన్ని రూపొందించండి.

10	17	15	22	11	16	19	24	29	18
25	26	32	14	17	20	23	27	30	12
15	18	24	36	18	15	21	28	33	38
34	13	10	16	20	22	29	19	23	31

జవాబు : (5 - 8 - 7 - 8 - 5 - 4 - 2 - 1)

6. 50 మంది కార్మికులు ఒక ఫ్యాక్టరీలో వినియోగించిన కాలం (గంటలు) నుండి స్టర్జస్ సూత్రం ఉపయోగించి తరగతుల సంఖ్యను నిర్ణయించి పౌనఃపున్య విభాజన పట్టీని తయారు చేయండి.

110	175	161	157	155	108	164	128	114	178
165	133	195	151	71	94	87	42	30	62
138	156	167	124	164	146	116	149	104	141
103	150	162	149	79	113	69	121	93	143
140	144	187	184	197	87	40	122	203	148

జవాబు : (3 - 4 - 6 - 9 - 12 - 11 - 5)

7. ఒక ప్రభుత్వ సంస్థలో పనిచేస్తున్న 50 మంది ఉద్యోగుల వయస్సులు కింద ఇవ్వబడినది. తగిన తరగతి అంతరంతో పౌనఃపున్య విభాజనం తయారు చేయండి.

67	34	36	48	49	31	61	34	43	45	38	32	28
61	29	47	36	50	46	30	46	32	30	33	45	49
48	41	53	36	37	47	47	30	46	50	28	35	35
38	46	43	34	36	62	69	50	28	44	43	60	38

జవాబు : (11 - 13 - 7 - 14 - 1 - 3 - 3)

8. కాకినాడలోని ఒక ఎరువుల ఫ్యాక్టరీలో 30 మంది కార్మికులకు చెల్లించిన నెలసరి వేతనాలు (రూ॥లలో) దిగువ తెలిపిన విధంగా ఉన్నాయి. పౌనఃపున్య వక్రము గీయండి.

310	325	370	300	331	315	350	359	380	342
305	337	392	363	367	320	354	335	397	375
390	386	360	323	327	318	367	340	385	393

9. ఒక పౌనఃపున్య పట్టీలో ఆరు తరగతి అంతరాలు ఉన్నాయి. వాటి పౌనఃపున్యాలు వరుసగా 3, 9, 15, 30, 18, 5 మూడవ తరగతి అంతరపు దిగువ అవధి, ఐదవ తరగతి అంతరపు మధ్య బిందువు వరుసగా 20, 45. అయిన పౌనఃపున్య పట్టీని నిర్మించండి.

జవాబు తరగతులు	0 - 10	10 -20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 -60
పౌనఃపున్యం	3	9	15	30	18	5

10 రూపాయల తరగతి అంతరం (విలీన పద్ధతి)తో పౌనఃపున్య విభాజన పట్టీని తయారు చేయండి. ప్రతి తరగతి అంతరానికి సాపేక్ష పౌనఃపున్యం, శాతపు పౌనఃపున్యాలను లెక్కించండి.

జవాబు : పౌనఃపున్యం 2 - 3 - 4 - 3 - 2 - 3 - 4 - 2 -3 - 4

సాపేక్ష పౌనఃపున్యం 0.067, 0.100, 0.133, 0.100, 0.067, 0.100, 0.133, 0.067, 0.100, 0.133

శాతపు పౌనఃపున్యం 6.7, 10, 13.3, 10, 6.7, 10, 13.3, 6.7, 10, 13.3.

10. 5 మార్కులను తరగతి అంతరంగా తీసుకొని కింద యిచ్చిన దత్తాంశాన్ని ద్విచలరాశి పౌనఃపున్య విభాజనంగా తయారు చేయండి. న్యాయశాస్త్రంలో 5 నుండి 9 మార్కులు, గణాంకశాస్త్రంలో అవే మార్కులు వచ్చిన వారెందరు?

గణాంక శాస్త్రం	15	0	1	3	16	2	18	5	4	17	6	19
న్యాయ శాస్త్రం	13	1	2	7	8	9	12	9	17	16	3	18
గణాంక శాస్త్రం	14	9	8	13	10	13	11	11	12	18	9	7

న్యాయ శాస్త్రం 11 3 5 4 10 11 14 7 18 15 15 3

జవాబు : (గణాంక శాస్త్రం : 5 - 6 - 7 - 6; న్యాయ శాస్త్రం 6 - 6 - 6 - 6)

11. కాలేజి విద్యార్థులకు సంబంధించిన ఈ కింది విషయాల నుండి ఒక ఖాళీ పట్టిని గీయండి.

ఎ) ఫాకల్టీ : సాంఘీక శాస్త్రం, వ్యాపార శాస్త్రం.

బి) తరగతి : పట్టభద్రుల కిందివి, పట్టభద్రుల పైవి

సి) లింగభేదం : పురుషులు, స్త్రీలు

డి) వయస్సు : 20 లోపు, 20 పైన

ఇ) సంవత్సరం : 1984, 1985

12. ఒక సంవత్సరంలో ఒక కళాశాలలో చదువుతున్న 1125 విద్యార్థులలో 720 మంది హిందువుల, 628 మంది బాలురు, 440 మంది సైన్స్ విద్యార్థులు. హిందూ బాలుర సంఖ్య 392, సైన్స్ చదివే బాలుర సంఖ్య 205, సైన్స్ చదివే హిందువుల సంఖ్య 262, హిందూ బాలురలో సైన్స్ విద్యార్థుల సంఖ్య 148. ఈ పౌనఃపున్యాలను త్రిమార్గ పట్టీలో నమోదు చేయ్యండి. మిగిలిన గదులు పౌనఃపున్యాలను కనుగొని పట్టీని పూర్తిచేయండి.

13. కింది వివరాలను పట్టీలో నమోదు చేయండి.

ఒక ప్రభుత్వ శాఖలో ఉద్యోగం కోసం దరఖాస్తు చేసిన 10,000 మంది మొత్తం అభ్యర్థులలో 6,854 మంది పురుషులు, 3,146 మంది పట్టభద్రులు, మిగిలిన వారు పట్టభద్రులు కారు. కొంత అనుభవం గల అభ్యర్థుల సంఖ్య 2,263. వీరిలో 1,860 మంది పురుషులు. పట్టభద్రులైన పురుషుల సంఖ్య 2,012. అనుభవము గల పట్టభద్రుల సంఖ్య 1,093. వీరిలో 323 మంది స్త్రీలు కలిసి ఉన్నారు.

14. కింది దత్తాంశమును తగిన చిత్రపటాల్లో చూపండి (సంఖ్యలు వేలలో)

జిల్లా	బెంగుళూరు	టుంకూర్	కోలార్	మాంధ్య
పురుషులు	2400	800	500	800
స్త్రీలు	1600	700	600	1000
మొత్తం	4000	1500	1100	1800

15. గత మూడు సంవత్సరాలలో ఒక యూనివర్శిటీలోని యం.బి.ఏ. విద్యార్థుల ఫలితాలనుకింద పట్టి చూపుతుంది వీటిని తగిన చిత్రపటంలో చూపండి.

సంవత్సరం	1985	1986	1987
ప్రథమశ్రేణి	60	70	60
ద్వితీయశ్రేణి	160	210	260
తృతీయశ్రేణి	260	310	360
తప్పినవారు	160	150	160

(బి.కాం. కేరళ 1988)

16. కింది దత్తాంశమును చూపడానికి బహుళ బార్ పటాన్ని గీయండి.

సంవత్సరం	1983	1984	1985	1986
అమ్మకాలు (వేల రూ)	100	120	130	150
స్థూలలాభం (వేల రూ)	30	40	45	50
నికర లాభం (వేల రూ)	10	15	25	25

(బి.కాం, (ఆనర్స్) ఢిల్లీ 1987)

17. కింది దత్తాంశం నుండి సోపాన చిత్రాన్ని గీయండి.

వేతనాలు (రూ॥)	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 40	40 - 60	60 - 80
కార్మికుల సంఖ్య	7	19	27	15	12	12	8

(బి.కాం. నాగార్జున, 1978

18. కింది దత్తాంశం నుండి సోపాన చిత్రాన్ని నిర్మించండి.

మధ్య విలువ :	15	25	35	45	55	65	75
పౌనఃపున్యం	10	24	40	32	20	14	4

(బి.కాం. కేరళ 1982)

19. ఒక తరగతిలోని విద్యార్థుల పౌనఃపున్య విభాజనము ఈ దిగువన ఇవ్వబడి దాని నుండి పౌనఃపున్య బహుభుజిని గీయండి.

ఎత్తు (అంగుళాలు)	59 - 61	61 - 63	63 - 65	65 - 67	67 - 69	69 - 71	71 - 73
విద్యార్థుల సంఖ్య	2	6	7	15	16	8	1

(బి.కాం. శ్రీకృష్ణదేవరాయ, 1989)

20. కింది దత్తాంశమునకు సోపాన చిత్రం గీసి దానిపై పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మించండి.

వయస్సు	10 - 11	11 - 12	12 - 13	13 - 14	14 - 15	15 - 16	16 - 17	17 - 18	18 - 19
విద్యార్థుల సంఖ్య	7	10	19	29	34	26	16	8	6

(బి.కాం. ఆంధ్ర 1987)

21. కింది దత్తాంశం నుండి సోపాన చిత్రాన్ని, పౌనఃపున్య వక్రరేఖను గీయండి.

తరగతి అంతరం	7 -10	11 - 14	15 - 18	19 - 22	23 - 26	27 -30
పౌనఃపున్యం	10	18	23	22	19	8

(బి.కాం. కేరళ 1982)

22. కింది దత్తాంశం నుండి ఓజివ్ వక్రము గీసి మధ్యగతం గుర్తించండి.

పరిమాణము	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
పౌనఃపున్యము	3	5	8	4	2

(బి.కాం. బెంగుళూరు 1982)

23. కింద ఇవ్వబడిన దత్తాంశానికి కంటె తక్కువ, కంటె ఎక్కువ ఓజివ్ వక్రరేఖలను గీసి మధ్యగతంను కనుగొనండి.

మార్కులు	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
విద్యార్థుల సంఖ్య	4	6	10	15	12	7	6

(బి.కాం. ఉస్మానియా 1989)

24. దిగువ దత్తాంశం నుండి రేఖాచిత్రం పటం ద్వారా మధ్యగతం విలువను నిర్ణయించుము

తరగతి అంతరం	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120	120 -140	140 - 160
పౌనఃపున్యం	4	6	10	16	12	7	3

(బి.కాం. ఆంధ్ర. 1989

పాఠం - 4

భారతదేశ గణాంక వ్యవస్థ
Indian Statistical System

ఒక దత్తాంశ సేకరణ, విశ్లేషణ, సమర్పణ అనే భావాలు ఇంతవరకు సిద్ధాంతపరచిన తరువాత మనం ఈ పాఠం ద్వారా భారతదేశంలో గణాంక వ్యవస్థ యొక్క చారిత్రాత్మక పురోగతిని గురించి తెలుసుకుందాము.

ముఖ్యాంశాలు :

4.1 గణాంక శాస్త్రం - మూలం అభివృద్ధి

4.2 మనదేశంలో సాంఖ్యక వివరాలు

4.3 ప్రస్తుతం మనదేశంలోని సాంఖ్యక వ్యవస్థ

4.4 కేంద్రీయ సాంఖ్యక సంస్థ

4.5 జాతీయ శాంపుల్ సర్వే

4.6 ఆంధ్రప్రదేశ్‌లో సాంఖ్యక కార్యాలయం

4.1 గణాంక శాస్త్రం - మూలం అభివృద్ధి

గణాంకశాస్త్రం ఇటీవలకాలంలో బాగా అభివృద్ధి చెందినప్పటికీ దీనిని చాలా పురాతనమైన శాస్త్రంగానే భావించాలి. నాగరికత, సంస్కృతి ఎంత ప్రాచీనమైనవో గణాంకశాస్త్రం కూడా అంతే ప్రాచీనమైనది. గణాంక శాస్త్రాన్ని ఆంగ్లభాషలో 'స్టాటిస్టిక్స్' అని అంటారు. ఇది లాటిన్ భాషలోని 'స్టాటస్', జర్మన్ భాషలోని 'స్టాటోస్టిక్'. ఇటలీ భాషలోని 'స్టాటో' అనే పదాలనుండి పుట్టినదనే అభిప్రాయం ఉంది. ఈ పదం 'రాజ్యం' లేదా 'రాజ్యాంగ శాస్త్రం' అనే అర్థాలను ఇస్తాయి. పూర్వకాలంలో రాజులు ప్రజలను గురించిన వివరాలు సేకరించి సైనిక సిబ్బంది అవసరాలను అంచనావేసేవారు. అదే విధంగా ప్రజల ఆస్తిపాస్తుల వివరాలు సేకరించి పన్నులు విధిస్తూ ఉండేవారు. ఈ కారణంగానే గణాంకశాస్త్రాన్ని ఆ రోజుల్లో 'రాజుల శాస్త్రం', 'రాజ్యాంగ శాస్త్రం', 'రాజకీయ గణితశాస్త్రం' అని పిలిచేవారు.

ఆరంభంలో గణాంకాలను సక్రమ రాజ్యపాలన సేకరించి, ఉపయోగిస్తూ ఉండేవారు. మొట్టమొదటిసారిగా ఈజిప్టు దేశంలో క్రీస్తు పూర్వం 3050లోనే పిరమిడ్ల నిర్మాణానికై జనాభా లెక్కల సేకరణ జరిగినట్లు తెలుస్తుంది. అలాగే క్రీస్తు పూర్వం 435లో రోమ దేశంలో మొదటిసారిగా జనాభా లెక్కలు సేకరించడం జరిగింది. మధ్యయుగంలో అనేక సర్వేలు నిర్వహించి వివరాలు సేకరించినట్లు చెప్పడానికి అనేక ఆధారాలు ఉన్నాయి.

మనదేశంలో ఒక పద్ధతి ప్రకారం గణాంక వివరాలు సేకరించడం చాలాకాలం నుండే అమలులో ఉంది. భారతదేశంలో 2000 సంవత్సరాల క్రితమే గణాంక వివరాల సేకరణ జరిగినట్లు కౌటిల్యుని అర్థశాస్త్రం వల్ల తెలుస్తుంది. చంద్రగుప్తుని కాలంలో జనన మరణాలు, ఆదాయ వ్యయాలు, సైనిక వ్యవహారాలకు సంబంధించి దత్తాంశ సేకరణ జరిగిన పద్ధతులు అద్భుతంగా ఉండేవని చెప్పడానికి ఎన్నో ఆధారాలు ఉన్నాయి. మొగలుల కాలంలో కూడా అనేక రకాల దత్తాంశ సేకరణ జరిగినట్లు 'అని - ఇ - అక్బరి' అనే గ్రంథంలో వర్ణించడం జరిగింది. అక్బరు కాలంలో అతని రెవిన్యూ మంత్రి రాజా తోడర్‌మల్ భూమిశిస్తు నిర్ణయించడానికి గాను భూములు, వ్యవసాయం మొదలైన వాటికి చెందిన వివరాలు సేకరించినట్లు తెలుస్తుంది.

రాజుల శాస్త్రంగా ప్రారంభమైన గణాంకశాస్త్రం నేడు అన్ని రంగాలలోను ప్రధాన భూమిక నిర్వహిస్తుంది. నేడు ఈ శాస్త్రాన్ని ఉపయోగించని శాస్త్రీయ రంగమే లేదంటే అతిశయోక్తి లేదు. వ్యాపార సంస్థలు సరి అయిన నిర్ణయాలు తీసుకోవడానికి, ప్రభుత్వ దేశ

ఆర్థిక పరిస్థితులు అవగాహన చేసుకోవటానికి దేశాభివృద్ధికి అవసరమైన ప్రణాళికలు రూపకల్పనకు వాటి అమలు తీరు సమీక్షించడానికి గణాంకాలు, గణాంకపద్ధతులు ఎంతో ఉపయోగపడుతున్నాయి. ఈ విధంగా గణాంకశాస్త్రం దినదినాభివృద్ధిచెంది అన్నిరంగాలలో ప్రస్తుతం ప్రముఖస్థానం వహిస్తుంది.

4.2 మన దేశంలో సాంఖ్యిక వివరాల సేకరణ కోసం ఏర్పడిన సాంఖ్యిక వ్యవస్థ పరిణామం :

దేశ పరిపాలనలో ఎదురయ్యే అనేక సమస్యల పరిష్కారం కోసం ఏదో ఒక విధమైన సాంఖ్యిక దత్తాంశాన్ని సేకరించే విధానం చాలా పురాతన కాలంనుంచే జరుగుతున్నట్లు చారిత్రక ఆధారాలున్నాయి. క్రీ.శ. 1600 ప్రాంతంలో మొగలు చక్రవర్తుల కాలంలో వ్యవసాయోత్పత్తులు, సాగుబడి. భూ విస్తీర్ణం వంటి విషయాలకు చెందిన సమాచారాన్ని, సేకరించేవారు. 1690లో "సర్ విలియం పెట్టీ" ఆర్థిక సాంఖ్యిక శాస్త్రం సంబంధాన్నీ సాంఖ్యిక దత్తాంశ ఆవశ్యకతనూ తన "పొలిటికల్ అర్థమేటిక్" (Political Arithmatic) అనే గ్రంథంలో విశదపరిచాడు. మనదేశంలో 18వ శతాబ్ది వరకూ సక్రమమైన సాంఖ్యిక వ్యవస్థ లేదనే చెప్పవచ్చు. ఏదో ఒక రకమైన దత్తాంశాన్ని సేకరించినప్పటికీ అటువంటి సాంఖ్యిక వివరాల ఆవశ్యకతనూ, వాటిని సమన్వయపరచే సక్రమమైన వ్యవస్థ రూపకల్పననూ గుర్తించలేదు.

1868లో Statistical Abstract of British India వార్షిక సంచిక వెలువడింది. దీనిలో అప్పటి భారతదేశ ఆర్థిక పరిస్థితులను కొంతవరకూ వ్యక్తం చేయడానికి ప్రయత్నం జరిగింది. అయినా అప్పటి భారతదేశం ఆర్థిక పరిస్థితి కంటే బ్రిటిష్ వ్యాపార సంబంధ విషయాలకే ఆర్థిక ప్రాముఖ్యం ఇవ్వటం జరిగింది. 1883లో "అఖిల భారత సాంఖ్యిక సమావేశం నిర్వహించారు. దీనిలో దేశంలోని పంటల అంచనా, భూ విస్తీర్ణం వంటి వ్యవసాయ సాంఖ్యిక వివరాలనూ, వ్యక్తులకు చెందిన సమగ్ర సమాచారాన్నీ తెలుసుకోవడానికి వీలుగా, దేశవ్యాప్తమైన జనాభా సెన్సను నిర్వహించాలని నిర్ణయించారు. 1880లో ఏర్పరచిన 'ఫైనాన్సు కమిషన్' ఒక ప్రత్యేక వ్యవసాయ సాంఖ్యిక విభాగాన్ని ఏర్పరచాలనీ, సాంఖ్యిక అధికారులను నియమించాలనీ ప్రతిపాదించింది. 1886లో డిపార్టుమెంటు ఆఫ్ ఫైనాన్స్ కమీషన్ ఆధ్వర్యంలో "Agricultural Statistics of British India" ప్రచురితమైంది. దేశవ్యాప్తం గాను, విభిన్న రాష్ట్రాలలోనూ, పరగణాలలోనూ వ్యవసాయక వ్యాపార తదితర వివరాలను సేకరించి ప్రచురించాలని 1895లో నిర్ణయించారు. వీటిని సమన్వయ పరచటానికి కేంద్రంలో స్టాటిస్టికల్ బ్యూరోను స్థాపించారు. దీనికి Director General of Statistics ను అధికారికంగా నియమించారు.

1905లో విభిన్న ప్రాంతాలలో Department of Commercial Intelligence and Statistics (DCIS) నూ, కేంద్రంలో Director General of Commercial Intelligence and Statistics (DGCIS) నూ స్థాపించారు. అంతకు ముందు ఉన్న DGS ను దీనిలో కలిపేశారు. 1906 నుంచి ఈ సంస్థ Indian Trade Journal వంటి కొన్ని ప్రచురణలను వెలువరిస్తున్నది. దేశంలోని పరిశ్రమలను అభివృద్ధి పరచే దృష్ట్యా 1916లో "పారిశ్రామిక సంఘాన్ని" ఏర్పరచారు. పారిశ్రామిక రంగంలోని సాంఖ్యిక వివరాలు అందుబాటు యొక్క లోటునూ, DCIS అప్పటి వరకూ సేకరించ కలిగిన, సేకరిస్తున్న వివరాల అసంపూర్ణతనూ ఈ సంఘం ప్రభుత్వ దృష్టికి తెచ్చింది. 1924లో ఆర్థిక పారిశ్రామిక రంగాలలో దేశం ఎంత వెనకబడిందో తెలుసుకోవడానికీ, దాని మెరుగుపరచే చర్యలను సూచించటానికీ, "సర్ విశ్వేశ్వరయ్య" అధ్యక్షులుగా "భారత దేశ ఆర్థిక విచారణ సంఘం" ఏర్పడింది. ఈ సంఘం సలహా మేరకు దేశవ్యాప్తంగా సక్రమమైన, నిత్యనూతనమైన, సమగ్రమైన సాంఖ్యిక వివరాలను సేకరించటానికీ, పరంపరంగా లభించే అటువంటి వివరాలను సమన్వయ పరచటానికీ ఒక నిర్దిష్టమైన పటిష్టమైన సాంఖ్యిక వ్యవస్థ (యంత్రాంగం) రూపకల్పన అవసరాన్ని గుర్తించారు. 1928లో "రాయల్ కమిషన్ ఆఫ్ అగ్రికల్చర్ - ఇండియా"ను ఏర్పరచారు. సాంఖ్యిక శాస్త్ర అభివృద్ధిలోను వివిధ రంగాలకు దాని అన్వర్తనంలోనూ ఎంతో ప్రముఖ పాత్ర వహిస్తున్న "ఇండియన్ స్టాటిస్టికల్ ఇన్స్టిట్యూట్" (Indian Statistical Institute - ISI) ఆవిర్భావం 1932లో జరిగింది.

మన దేశంలోని సాంఖ్యిక వ్యవస్థ నిర్మాణం పరిణామంలో 1934లో ఏర్పడిన "రాబర్ట్సన్ బౌలే" కమిటి ఒక ముఖ్యమైన మలుపని చెప్పవచ్చు. దేశంలోని ఆర్థికస్థితిని పర్యాలోకనం చేయడం, జాతీయాదాయాన్ని తగిన విధంగా మదింపు చేసే విధానాన్ని సూచించడం దేశపు ఆర్థిక స్థోమతను అధికం చేసే చర్యలను సూచించడం లక్ష్యాలుగా కమిటీ నియామకం జరిగింది. అయితే ఇటువంటి కీలకమైన విధానాలను అమలు జరపాలంటే పటిష్టమైన సాంఖ్యిక యంత్రాంగం అవసరమనీ, దానికి తగిన సాంఖ్యిక సంస్థల రూపకల్పన ఆవశ్యకమనీ ఈ కమిటీ

సూచించింది. దీని ఫలితంగా కేంద్రంలో "డైరెక్టర్ ఆఫ్ స్టాటిస్టిక్స్"ను స్థాపించారు. 1938లో భారతదేశ ఆర్థిక కార్యకలాపాలను సమన్వయ పరచటానికి ఆర్థిక రంగంలోని సమస్యలను పరిష్కార మార్గాలను సూచించటానికే "భారతదేశ ఆర్థిక సలహాదారు కార్యాలయాన్ని" (Economic Advisor to Government of India - EA) స్థాపించారు. 1949లో డిపార్ట్‌మెంట్ ఆఫ్ స్టాటిస్టిక్స్" (Department of Statistics) ను నెలకొల్పారు. దానిలోని భాగంగా 1951లో "కేంద్రీయ సాంఖ్యక సంస్థ" (Central Statistical Organisation - CSO) నూ ఆ తర్వాత 1955లో "జాతీయ శాంపుల్ సర్వే యూనిట్" (National Sample Survey Unit - NSU) నూ నెలకొల్పారు.

4.3 ప్రస్తుతం మనదేశంలోని సాంఖ్యక వ్యవస్థ

ప్రస్తుతం మనదేశములో ఉన్న సాంఖ్యక వ్యవస్థను మూడు భాగాలుగా విభజించవచ్చు.

(i) కేంద్రములో ఉన్న సంస్థలు; (ii) రాష్ట్రాలలోని సంస్థలు; (iii) ప్రైవేటు రంగంలోని సంస్థలు. మన రాజ్యాంగం ప్రకారం పరిపాలనా సౌకర్యం కోసం కేంద్ర రాష్ట్ర ప్రభుత్వాల ఆధ్వర్యంలో కొన్ని విభాగాలను కేటాయించటం జరిగింది. కేంద్ర ప్రభుత్వ ఆధ్వర్యములోని విభాగాలకు (Union list) సంబంధించిన వివరాలను ఆయా మంత్రిత్వశాఖలలో ఏర్పడిన సాంఖ్యక సంస్థలు సేకరించి ప్రచురిస్తుంటాయి. దేశరక్షణ, తంతి తపాలా, రైల్వేలు, విదేశమారకం, సైన్సన్, ఎక్సైజ్ సుంకం, వంటివి కేంద్ర ప్రభుత్వ జాబితాలో ఉంటాయి. ఆరోగ్యం, వైద్యం, పశుసంపద, ఆయకట్టు మైదలైన రాష్ట్రప్రభుత్వ సంబంధిత శాఖలలోని సాంఖ్యక వివరాల సేకరణ బాధ్యతను రాష్ట్రాలలో ఏర్పరచిన సాంఖ్యక బ్యూరోలు (Statistical Bureau) చేపడతాయి. కొన్ని అంశాలపై కేంద్రం, రాష్ట్ర ప్రభుత్వాలు రెండింటికి ఉమ్మడి అధికారం, బాధ్యత ఉంది కనక, ఉమ్మడి జాబితా (Concurrent list) క్రింద ఉండే విద్య, జీవసాంఖ్యక వివరాలు, ఆర్థిక సాంఘిక ప్రణాళికలు, ట్రేడ్ యూనియన్లు సాంఘిక భీమా, పారిశ్రామిక సంక్షేమం, విశ్రామం పునరావాసం వంటి ఉమ్మడి జాబితాలలోని అంశాలకు చెందిన వివరాలను రాష్ట్రాలు సేకరించి నప్పటికీ, వీటి ప్రచురణ, పర్యాలోకనం బాధ్యతలను కేంద్రమే స్వీకరిస్తుంది. కేంద్ర, రాష్ట్ర ప్రభుత్వాలు నిర్వహించే సంస్థలతోపాటు కొన్నిప్రముఖమైన ప్రైవేటు, మరిము (Semi and quasi Government) సాంఖ్యక సంస్థలు కూడా మన దేశంలోని సాంఖ్యక వివరాల సేకరణ, పరిశీలన ప్రచురణ బాధ్యతలను నిర్వహిస్తున్నాయి. Indian Statistical Institute (ISI), Institute of Economic Growth, Institute of Applied Manpower Research, Gokhale Institute of Economics వంటి కొన్ని సంస్థలు కేవలం సాంఖ్యక పరంగా పరిష్కరించే దృష్ట్యా, పరిశోధనాత్మక పరిశీలనలను నిర్వహించడం, సాంకేతికంగా అభివృద్ధి పరచిన పద్ధతులను రూపొందించడం, సాంఖ్య అన్వర్థనాలను పద్ధతులను, రూపకల్పన చేయడం, వీటన్నిటినీ తగిన విధంగా నిర్దేశించడం, అవసరమైన శిక్షణను సమకూర్చడం వంటి కార్యకలాపాలను కొనసాగిస్తుంటాయి.

ఎవరి ఆధ్వర్యంలో నిర్వహించినప్పటికీ, మన దేశంలోని సాంఖ్యక సంస్థలను ఈ క్రింది నాలుగు విధాలుగా వర్గీకరించవచ్చు.

(i) చట్ట నిర్వహణ, రాజ్యపరిపాలనా కార్యకలాపాలలో అనునిత్యం జనించే దత్తాంశాన్ని సంశ్లేషణ (Processing) చేయడానికి ఏర్పడిన సంఖ్యలు : రెవెన్యూ, సెంట్రల్ బోర్డ్, రైల్వే, తంతి తపాలా దేశ రక్షణకు అవసరమైన ఉత్పత్తులను అందించే కర్మాగారాలవంటి శాఖలలోని సాంఖ్యక విభాగాలు, బ్యూరోలు మొదలైనవి.

(ii) వస్త్రోత్పత్తి పంపిణీ, విదేశ మారకం వంటి విషయాలకు సంబంధించి కేంద్రంలో నెలకొల్పిన సంస్థలు : Textile Commissioner, Controller of India and Steel, Controller General of Imports and Exports, Electrical Commissioner to Govt of India వంటి సంస్థలలోని సాంఖ్యక విభాగాలు.

(iii) ప్రత్యేకంగా సాంఖ్యక వివరాలను సేకరించి ప్రచురించే బాధ్యతను చేపట్టే సంస్థలు : DCIS, NSSO, CSO, DES, Research Wing of RBI, EAO, LIC మొదలైనవి.

(iv) ముఖ్యంగా పరిశోధనాత్మక శిక్షణా వ్యాసంగాలను చేపట్టే సంస్థలు : ICAR, RBI, ISI, Gokhale Institute of Economics వంటివి, ఇందుకు ఉదాహరణలు.

కేంద్రంలో కొన్ని ముఖ్యమైన మంత్రిత్వశాఖలలో ఉండే సాంఖ్యక విభాగాలను పరిశీలిద్దాం.

4.3.1. ఆహార వ్యవసాయ మంత్రిత్వ శాఖ **(Ministry of Food and Agriculture)** : ఈ మంత్రిత్వ శాఖలో కింద పేర్కొన్న విభాగాలు ఉన్నాయి.

1. Director of Economics and Statistics (D.E.S.) : దీనిని 1947లో నెలకొల్పారు. అంతకు పూర్వం DCIS, Agricultural Marketing adviser to Govt of India, Ministry of Food, Ministry of Agricultural వారు విడివిడిగా సేకరిస్తున్న అన్ని రకాల వ్యవసాయ సంబంధ సాంఖ్యక వివరాలనూ, ప్రస్తుతం ఈ సంస్థ సేకరిస్తుంది. దేశంలోని ఆహారము, వ్యవసాయము, మత్స్య పరిశ్రమ, పశు సంపదలకు చెందిన సాంఖ్యక వివరాల దత్తాంశాన్ని సేకరించడం, విశ్లేషణ చేయడం, వాటికి సక్రమమైన అన్వయాన్ని చేయడం, ఆ విషయాలను ప్రచురించడం మొదలైనవి ఈ సంస్థ చేసే ముఖ్య కార్యకలాపాలు. వ్యవసాయ సంబంధ విషయాలలో మంత్రిత్వశాఖ తీసుకోవలసిన నిర్ణయాలకు ఈ సంస్థ తన దత్తాంశం ఆధారంగా సలహాలు ఇస్తుంది.

2. Directorate of Marketing and Inspection (D.M.I.) : మార్కెట్‌లోకి వచ్చిన చేపలు, పాలు, గుడ్లు వంటి ఎన్నో వ్యవసాయ సంబంధ వస్తువుల వివరాలను సేకరించి ఈ సంస్థ ప్రచురిస్తుంది. ఈ ప్రచురణలలో ముఖ్యమైన వ్యవసాయ సంబంధ వస్తువుల ఉత్పత్తి, సరఫరా పంపిణీలకు చెందిన సాంఖ్యక వివరాలు ఉంటాయి. మంత్రిత్వశాఖ తీసుకొనే వ్యవసాయ ఆర్థిక సంబంధ విధానాలకు ఈ శాఖ తగిన సలహాలను కూడా ఇస్తుంది.

3. Indian Statistical Institute (I.S.I.) : దీనిని 1932లో స్థాపించారు. సాంఖ్యక సిద్ధాంతంలోను, అనువర్తిత ప్రయోగాలలోను, అభివృద్ధిని సాధించి సక్రమమైన పద్ధతులను రూపొందించడం దీని ప్రధాన లక్ష్యం. సర్వే యోచన, ప్రతిరూప రచన, షెడ్యూల్‌ల రచన, కార్యరంగంలో పనిచేసే వారికి సూచనలు తయారుచేయడం, సాంకేతిక సలహాలు ఇవ్వడం, వర్గీకరణ, ఆఖరి రిపోర్టులు తయారివంటి సాంకేతిక కార్యాల బాధ్యతను ఈ సంస్థ వహిస్తుంది. ISI లోని లాభార్జన ప్రమేయం లేకుండా - కేవలం విద్యాబోధన, పరిశోధన, పర్యవేక్షణ, సాంఖ్యక పరిజ్ఞానాన్ని అభివృద్ధి చేయడం, వంటి లక్ష్యాలతో ఈ సంస్థను నెలకొల్పటం జరిగింది. దాని స్థాపననాటి ఉద్దేశాలు. (i) ఉన్నత సాంఖ్యక పరిజ్ఞానం కల సంస్థగా రూపొందించటం, (ii) పరిశోదన, శిక్షణ విభాగాలలో అధ్యయన కేంద్రంగా తీర్చిదిద్దడం, (iii) బృహత్ సాంఖ్యక పథకాలను నిర్వహించే వారికి తగిన సలహా సంప్రదింపులను అందించడం.

   ISI తన కార్యక్రమాలను ఈ కింది విభాగాలలో కొనసాగిస్తుంది.

   (i) విద్యావిషయక బోధన, డిగ్రీలు

   (ii) అంతర్జాతీయ సాంఖ్యక సంస్థ

   (iii) అదనపు శిక్షణ

   (iv) సాంఖ్యక గుణ నియంత్రణ విభాగం

   (v) ఇతర సంస్థలకు శిక్షణ - నిర్దేశన

   (vi) ఇతర కార్యక్రమాలు : సెమినార్లు, సింపోజియాలు, కాన్ఫరెన్సులు.

   (vii) సంస్థ ప్రచురణ - సాంఖ్య. మొదలైనవి.

4. Indian Agricultural Statistical Institute (IASRI) : Indian Council of Agriculture Research అనే సంస్థలో ఉన్న సాంఖ్యక విభాగామే (ICAR). ఈ విభాగంలో సుశిక్షితులైన సాంఖ్యక నిపుణులు ఉన్నారు. ఈ సాంఖ్యక విభాగం ముఖ్య కార్యకలాపాలు.

   ఎ) వ్యవసాయక, పశుసంపద ప్రయోగాలను రచించడానికి సలహాలు ఇస్తుంది.

బి) ICAR నిర్వహించే ప్రయోగాలను, సాంఖ్యక పద్ధతుల రీత్యా పరిశీలించి తుది నివేదికలను తయారు చేయడంలో సహాయపడుతుంది.

సి) వ్యవసాయ, పశుసంబంధ సాంఖ్యక విభాగాలలో తగిన శిక్షణ ఇస్తుంది.

డి) వ్యవసాయ, పశుసంబంధ రంగాలలోని సమస్యలకు, సాంఖ్యక శాస్త్ర పద్ధతులను అనువర్తనం చేయడానికి అవసరమయ్యే ప్రాతిపదిక పరిశోధనలను నిర్వహిస్తుంది.

ఇ) వ్యవసాయక, పశుసంబంధ సాంఖ్యక వివరాలను సేకరించడానికి అవసరమయ్యే శాంప్లింగ్ పద్ధతులను రూపొందించడానికి పరిశోధనలను నిర్వహిస్తుంది.

ఈ విభాగమునకు అనుబంధంగా "Indian Society of Agricultural Statistics" అనే విజ్ఞాన శాస్త్ర సంబంధమైన సమాజాన్ని 1947లో స్థాపించారు. దీని ముఖ్య ప్రచురణ "Journal of the Indian Society of Agricultural Statistics." ఈ సమాజం (Society) ప్రతి సంవత్సరము గణాంక శాస్త్రజ్ఞులకు సభలను నిర్వహిస్తుంది. ఈ సమాజం అనేక అంతర్జాతీయ సాంఖ్యక సమాజాలతో సంబంధ బాంధవ్యాలు కలిగి ఉంది.

5. Statistical Section of the Forest Research Institute :

"అటవీ పరిశోధన సంస్థ"కు అవసరమయ్యే ప్రయోగాలను రచించడం, దత్తాంశాన్ని సమకూర్చి విశ్లేషణ చేయడం మొదలైన పనులను ఈ విభాగంలో జరుపుతుంది. రాష్ట్రప్రభుత్వాలకు సలహాలు ఇవ్వడం, అటవీ శాఖాధికారులకు శిక్షణ ఇవ్వడం, అటవీ పరిశోధన సంస్థకు చెందిన నియమిత కాలంలో వెలువడే పత్రికలను, నిర్దిష్ట ప్రయోజనానికి (adhoc) వెలువడే పత్రికలను ప్రచురించడం వంటివి ఈ విభాగం ముఖ్యపనులు.

4.3.2 వ్యాపార పారిశ్రామిక మంత్రిత్వశాఖ (Ministry of Commerce and Industry) : ఈ మంత్రిత్వశాఖలో క్రింది పేర్కొన్న విభాగాలు ఉన్నాయి.

1. వ్యాపార పారిశ్రామిక మంత్రిత్వశాఖ (Ministry of Commerce and Industry)

(i) Department of Commercial Intelligence and Statistics (DCIS) : 1950లో ఈ సంస్థను నెలకొల్పారు. ఇది నిర్వహించే పనులు :

a) ప్రభుత్వం వాంఛించే వ్యాపార పరమైన వివరాలను సేకరించి అందిస్తుంది.

b) దేశంలో నమోదు అయిన (Registered) వ్యాపార సంస్థల జాబితాను తయారుచేసి వాటికి సంబంధించిన వివరాలను నిత్య సంపూర్ణంగా (update) ఉంచుతుంది.

సి) వ్యాపార పారిశ్రామిక రంగాలలోని వారికి సహాయకారికగా ఉంటుంది. ఈ సంస్థ ప్రచురించే కొన్ని ముఖ్య ప్రచురణలు 1. Indian trade journal (weekly); 2. Accounts relating to the Inland Trade (monthly); 3. Monthly Statistics of Foreign Trade of India; 4. Annual Statement of Foreign Trade in India.

2. Office of the Economic Advicer to the Govt of India : భారతదేశ ఆర్థిక సలహాదారు కార్యాలయాలను 1933లో ఢిల్లీలో స్థాపించారు C.S.O. ఏర్పడక పూర్వం దేశంలోని సాంఖ్యక వివరాలను ఈ సంస్థ సంయమనం చేస్తూ ఉండేది. ప్రస్తుతం C.S.O. ఏర్పడ్డ తరువాత ఈ సంస్థ ధరలను పరిశీలించి, సూచక సంఖ్యలను నిర్మిస్తుంది. వ్యాపార పారిశ్రామిక మంత్రిత్వశాఖలోని అన్ని సాంఖ్యక విభాగాలను ఇది సంయమనం చేస్తుంది. దీని ముఖ్య ప్రచురణలు. 1) Whole - Sale Price - Index (weekly); 2) Whole - Sale Price Revised (weekly); 3) Basic Statistical Material regarding Foreign Trade, Productions and Price (monthly)

5)

3. Statistical Division, Office of the Chief Controller of Imports and Exports, New Delhi : ఈ సంస్థను 1947లో స్థాపించారు. అప్పుడు దీనిలో ఎగుమతులకు, దిగుమతులకు విడి సంస్థలు ఉండేవి. కాని 1951 లో రెండింటినీ కలిపి ఒకే సంస్థగా ఏర్పరచారు. ప్రస్తుతం ఈ సంస్థలో 10 యూనిట్లు ఉన్నాయి. ఇవి ముఖ్యంగా ఎగుమతులు, దిగుమతులు, దిగుమతుల లైసెన్సులు, విదేశీ ద్రవ్య అంచనాలు (Estimate of Foreign Exchange) మొదలైన అంశాలకు సంబంధించిన నిర్ణయాలను చేయడానికి వీలుగా, దత్తాంశాన్ని సేకరిస్తుంటాయి. ఈ సంస్థ ముఖ్య ప్రచురణ "Weekly Bulletin of Imports and Exports Trade Control." ఇదిగాక, ఈ మంత్రిత్వశాఖలో ఇంకా Statistical Section of the Iron and Steel Controller వంటి మరికొన్ని భాగాలు కూడా ఉన్నాయి.

4.3.3 ఆర్థిక మంత్రిత్వ శాఖ (Ministry of Finance)

ఈ శాఖ కింద ఉన్న సాంఖ్యక విభాగాలలో కొన్ని ముఖ్యమైనవి. (i) Income Tax Statistical Branch of the Central Board of Revenue; (ii) Statistical and Intelligence Branch of customs and Central Excise of the Central Board of Revenue. (iii) The Research and Statistical Section of the RBI.

ఈ విభాగాలన్ని కేంద్ర ప్రభుత్వానికి సంబంధించిన ఆదాయం, తదితర ఆర్థిక విషయాలలో అన్ని రకాల దత్తాంశాలను సేకరించి ప్రచురిస్తుంటాయి. ముఖ్యంగా RBI లోని ముఖ్య సాంఖ్యక విభాగం ఎన్నో సాంఖ్యక వివరాలను సేకరించి, తనకోసం ప్రభుత్వం కోసం, ఇతర జాతీయ, అంతర్జాతీయ సంస్థల (International Monetary Fund - IMF వంటి) కోసం ప్రచురిస్తుంది. రకరకాల సూచన సంఖ్యలను నిర్మించి, తమ "RBI Bulletin" లో ప్రచురిస్తుంటారు. దేశంలోని ముఖ్యమైన కంపెనీల అకౌంట్లను విశ్లేషణ చేయడం, వారు నిర్వహించదలచిన శాంపుల్ సర్వేలను రూపొందించడం మొదలైనవి కూడా ఈ విభాగం చేస్తుంది. ఈ సంస్థ గ్రామీణ ఋణవ్యవస్థను (Rural Credit system) నిర్ణయించడానికి, కొన్ని ఎంచుకొన్న జిల్లాల లోని గ్రామాలలో Rural Credit Survey లను నిర్వహించింది.

ఈ విభాగం నుంచి నియమిత కాలంలో వెలువడే కొన్ని ముఖ్య ప్రచురణలు. 1. Statistical Table Relating to Banks in India (Annual); 2. Report on the Trade and Progress of Banking in India (A); 3. Report on Currency and Finance (A); 4. Review of Cooperative Movement in India (A); 5. Reserve Bank of India Bulletin (monthly) ఇవి గాక కొన్ని నిర్దిష్ట (adhoc) ప్రయోజనాలకు కూడా ప్రచురణలు వెలువడుతుంటాయి.

4.3.4 కార్మిక, ఉద్యోగిత ప్రణాళికా మంత్రిత్వశాఖ **(Ministry of Labour Employment)**

1. Labour Bureau: Simla రెండో ప్రపంచ యుద్ధం తరువాత, 1946లో దేశంలోని అన్ని ప్రాంతాలలోని పారిశ్రామికుల స్థితిగతులను పరిశీలించి, వాటికి సంబంధించిన సాంఖ్యక వివరాలను సేకరించే నిమిత్తం. ఈ సంస్థను స్థాపించారు. ఈ సంస్థ దేశంలోని ముఖ్యమైన పట్టణాలలో శ్రామిక వివరాలను (Labour Statistics) సేకరించి జీవన ప్రమాణ సూచక సంఖ్యలను నిర్మించి ప్రచురిస్తుంది. 1. Indian labour year Book; 2. Trade unions in India (A); 3. Indian Labour Statistics; 4. Large Industrial Establishment in India (A); 5. Minimum wages (Report of the working of minimum wages Act, 1948) (A). 6. Indian Labour Journal (monthly); 7. Statistics of the Factories (A).

2. Statistical Unit, Ministry of Labour (Agricultural Labour enquiry Statistical Branch) 1950 - 51లో ప్రభుత్వం నియమించిన మొదటి "వ్యవసాయ, శ్రామిక విచారణ సంఘం" నిర్వహించే పనులకు సాంఖ్యక పద్ధతుల (సేకరణ, కూర్పు, విశ్లేషణ, వివరణ)ను అనువర్తించి, నివేదికలను తయారు చేయడానికి ఈ విభాగం సహాయపడింది. ఈ సందర్భంగా ఎన్నో (adhoc) ప్రచురణలను వెలువరించింది. అదేవిధంగా 1956లో ఏర్పడ్డ రెండవ "వ్యవసాయ శ్రామిక విచారణ సంఘానికి కూడా ఈ విభాగం సహాయపడింది. ప్రస్తుతం ఈ విభాగం, శ్రామిక మంత్రిత్వశాఖలో ఒక భాగంగా ఉంది. వ్యవసాయ శ్రామిక విచారణ సంఘానికి కూడా ఈవిభాగం సహాయపడింది. ప్రస్తుతం ఈ విభాగం, శ్రామిక మంత్రిత్వశాఖలో ఒక భాగంగా ఉంది. వ్యవసాయ శ్రామికుల (Agricultural Labour) జీవన ప్రమాణ సూచక సంఖ్యలను ప్రచురిస్తున్నాయి.

3. Statistical Section of the Directorate of Resettlement and Employment : కార్మిక మంత్రిత్వశాఖలోని ఈ విభాగం దేశంలోని ఉద్యోగిత వివరాలను, కేంద్రప్రభుత్వ ఉద్యోగుల వివరాలను సేకరించి ప్రచురిస్తుంది. దీని ముఖ్య ప్రచురణ "Hand Book of Employment Facilities Available in India" అనే వార్షిక సంచిక.

4.3.5 దేశ వ్యవహారాల మంత్రిత్వశాఖ (**Ministry of Home Affairs**) : ఈ శాఖలోని ముఖ్య సాంఖ్యక విభాగం "Census Commissioner and Registrar General of India" దీనిని 1948లో నెలకొల్పారు. దేశంలోని జీవసాంఖ్యక వివరాలను జనాభా వివరాలను సేకరించడానికి శాస్త్రీయ పద్ధతులను రూపందించడం, దేశంలోని జనాభా పరిగణన జరపడం వంటివి దీని పనులను ఈ సంస్థ దేశంలో 10 సంవత్సరాలకు ఒకసారి జరిగే "దేశ వార్షిక జనాభా పరిగణన"ను 5 సంవత్సరాలకు ఒకసారి జరిగే "దేశ వార్షిక జనాభా పరిగణన' ను 5 సంవత్సరాలకు ఒకసారి జరిగే "పంచవార్షికా పశుగణన"ను నిర్వహించి, సెన్సస్ (పరిగణన) రిపోర్టులను పొందుపరుస్తు. జాతీయ రిజిస్టర్‌ను కూడా తయారు చేస్తుంది. ఈ విభాగానికి సంబంధించిన కొన్ని ముఖ్య ప్రచురణలు 1. సెన్సస్ నివేధికలు (adhoc); 2. Vital Statistics of India (a); 3. Indian Population Bulletin (half-yearly)

4.3.6 ఆరోగ్య మంత్రిత్వ శాఖ (**Ministry of Health**) : ఈ శాఖ ఆధ్వర్యంలో, ఒక సాంఖ్యక బ్యూరో (Statistical Bureau) ఉంది. ఈ బ్యూరో దేశంలోని ఆరోగ్యం, వైద్య సదుపాయాలకు సంబంధించిన దత్తాంశాన్ని సేకరించి ప్రచురిస్తుంది. (Health Atlas of India) అనే వార్షిక సంచికతో బాటు ఎన్నో అడహాక్ సంచికలను కూడా ఈ బ్యూరో ప్రచురిస్తుంది.

4.3.7 రైల్వే మంత్రిత్వశాఖ (**Ministry of Railways**) : ఈప్రభుత్వ శాఖ ఆధ్వర్యంలో ఉన్న (i) రైల్వే బోర్డు (ii) General Manager's Office (iii) Chief Mechanical Engineer's Office (iv) Chief Operating Superintendents Office (v) Chief Commercial Superintendent's Office మొదలైన కార్యలయాలలో సాంఖ్యక యూనిట్లు ఉన్నాయి. వీటన్నిటిలో ముఖ్యంగా, రైల్వే బోర్డు దేశంలోనే రైల్వేల నిర్వహణలో లభించే సాంఖ్యక వివరాలన్నింటిని సేకరించి ప్రచురిస్తుంది. ఈ విధంగా కేంద్ర ప్రభుత్వంలోని ఎన్నో మంత్రిత్వశాఖల అనుబంధంగా సాంఖ్యక విభాగాలు ఉన్నాయి.

4.3.8 ప్రస్తుత రాష్ట్ర ప్రభుత్వాలలో ఉన్న సాంఖ్యక వ్యవస్థ : రాష్ట్ర ప్రభుత్వాలలోని సాంఖ్యక వ్యవస్థ కేంద్రంలో ఉన్నంత పటిష్టంగా లేదు. విభిన్న ప్రయోజనాల కోసం, ప్రతిరాష్ట్రంలోను, సాంఖ్యక విభాగాలు ఉన్నప్పటికి వాటి నిర్వహణలో విభిన్న రాష్ట్రాలలో ఏకరూపత (Uniformity) లేదు. 1946లో గ్రెగరీ సంఘం (Gregory Commission) వారి సలహామేరకు ప్రతి రాష్ట్రంలోను Statistical Bureau లను ఏర్పరచారు. రాష్ట్రంలోని సాంఖ్యక వివరాలను సేకరించే సంస్థల కార్యకలాపాలను ఈ బ్యూరోలు సంయమనం (Coordinate) చేస్తాయి. రాష్ట్రప్రభుత్వం వెలువరించే సాంఖ్యక ప్రచురణలన్నీ ఈ బ్యూరోలే ప్రచురిస్తాయి. దాదాపు అన్ని రాష్ట్రాలలోను ఇటువంటి బ్యూరోలను "Director of Economics and Statistics" ఆధ్వర్యంలో నెలకొల్పారు. రాష్ట్రంలోని ఎన్నో విషయాలకు సంబంధించిన సాంఖ్యక వివరాలను, ఈ బ్యూరోలు సేకరించడం, కూర్చడం, ప్రచురించడం వంటివి చేస్తుంటాయి. ఈ బ్యూరోలు C.S.O. కు కావలసిన సమాచారాన్ని అందిస్తుంటాయి. రాష్ట్రాలలోని ముఖ్యమైన సాంఖ్యక వివరాలను నిర్వహించే పనికోసం బ్యూరోలే, కాక ఈ క్రింది భాగాలలోని సాంఖ్యక యూనిట్లు కూడా కృషిచేస్తుంటాయి. a) Department of Economics and Statistics; b) Department of Agriculture; c) Department of Industries (Cottages., large Scale); d) Department of Health and Hygine; e) Department of Planning; f) Department of Labour and Social Welfare; g) Department of Endowment's and Tribal Welfare; h) Department of Animal Husbandary; i) Department of Forests and Fisheries; j) Department of Land Revenue మన రాష్ట్రంలలోని "Bureau of Economics and Statistics" సంస్థవారు, మన రాష్ట్రంలోని ఎన్నో రంగాలలోని దత్తాంశాన్ని విభిన్న ఆధారాల ద్వారా స్వీకరించి ప్రచురిస్తున్నారు. మన రాష్ట్ర బ్యూరో ముఖ్య ప్రచురణలు 1. The Economic and Statistical Bulletin; 2. Statistical Abstract of Andhra Pradesh (A); 3. Hand Book of Statistics (A) మొదలైనవి.

4.4 కేంద్రీయ సాంఖ్యక సంస్థ (Central Statistical Organisation - CSO)

ప్రస్తుతం మనదేశంలోని సాంఖ్యక వ్యవస్థలో, CSO అతి ముఖ్యమైన విభాగం. దీనిని 1951లో Cabinet Secretariat లో నెలకోల్పారు. సాంఖ్యక వివరాల సహాయంలో ప్రభుత్వానికి సలహాలు ఇవ్వడానికి, దేశంలోని సాంఖ్యక వివరాలను, సంయమనం చేయడానికి, దీనిని ఏర్పరచారు. కాని ప్రస్తుతం CSO నిర్వహించే విధులు, బాధ్యతలు ఎక్కువయ్యాయి. 1954లో CSO లో NIV ని ఏర్పరచారు. అంతవరకు NIU ఆర్థిక శాఖ ఆధ్వర్యంలో ఉండేది. 1957లో అంతవరకు వ్యాపార పారిశ్రామిక మంత్రిత్వ శాఖలో ఉన్న Directorate of Industrial Statistics (DIS) ను CSO ఆధ్వర్యానికి మార్చారు. అట్లానే, ప్రణాళిక సంఘానికి కావలసిన సలహాలను సమాచారాన్ని అందించడానికి ప్రత్యేక విభాగాన్ని నెలకొల్పారు. వీటన్నిటి వల్ల CSO విధులు విస్తరించాయి. అందువల్ల 1961లోని Department of Statistics అన్న విభాగాన్ని ప్రత్యేకంగా నెలకొల్పి అందులో CSO, NSS కార్యాలయాలను విడివిడిగా ఏర్పరచారు. ప్రస్తుతం CSO నిర్వహించే విధులు.

1. కేంద్రంలోను, రాష్ట్రాలలోను జరిగే సాంఖ్యక కార్యకలాపాలను సమన్వయ పరచడం.
2. వివరాలను సేకరించడం, విశ్లేషణ చేయడం, మొదలైన వాటిలో ప్రమాణాత్మకమైన సాంఖ్యక పద్ధతులను (Standard Statistical methods) రూపొందించడం.
3. ప్రభుత్వానికి, వివిధ మంత్రిత్వ శాఖలకు, సాంఖ్యక పరమైన విషయాలలో తగిన సలహాలు ఇవ్వడం.
4. ప్రణాళికలకు అవసరమయ్యే సాంఖ్యక వివరాలను అందించడం.
5. సాంఖ్యక వివరాల సేకరణలోను, సాంఖ్యక పద్ధతులలోను, సాంకేతిక శిక్షణ ఇవ్వడం.
6. జాతీయ ఆదాయాన్ని అంచనా వేయడం.
7. Annual Abstract of Statistics, monthly Abstract of Statistics (with weekly supplements), Estimates of National Income మొదలైన సంచికలను ప్రచురించడం.
8. United National Statistical office, Food and Agricultural Organisations (FAO) మొదలైన అంతర్జాతీయ సాంఖ్యక సంస్థలకు మన దేశ సాంఖ్యక వివరాలను అందజేయడం.
9. అంతర్జాతీయ సాంఖ్యక సమావేశాలకు కావలసిన సాంఖ్యక వివరాలను తయారు చేయడం.
10. కేంద్రంలోను, రాష్ట్రాలలోను ఉన్న సాంఖ్యక విభాగాలకు సూచనలివ్వడం. సాంఖ్యక పద్ధతులకు, విధానాలకు, క్రమమైన సమగ్రమైన, భావాలను రూపొందిస్తూ అధికారిక సాంఖ్యక వివరాలలో సాంకేతిక శిక్షణ ఇవ్వడం.
11. కేంద్ర, రాష్ట్ర ప్రభుత్వాలు, ఇతర సంస్థలు, ఏదైనా ప్రత్యేక పరిస్థితిని ఎదుర్కొన్నప్పుడు దానికి సాంఖ్యకపరమైన పద్ధతుల రీత్యా పరిష్కార మార్గాన్ని సూచించడం.

CSO లో ఈ క్రింది ముఖ్య భాగాలున్నాయి.

1. Statistical Intelligence Division 2. Planning and State Statistics Division 3. Labour and Industry Division 4. Methodology Division 5. Population and Scientific Man Power Division 6. National Sample Survey Division 7. Training Division (including Business Machines Unit) 8. National Income Division 9. Price and cost of living statistics Division 10. Income Distribution committee Unit 11. Industrial Statistical wing.

CSO రాష్ట్ర ప్రభుత్వాలు అనుసరించదలచిన సాంఖ్యక పథకాలను (Statistical Schemes) పరిశీలించి, వాటిని మెరుగు పరచడానికి సలహాలు ఇస్తుంది. CSO సూచనల మేర పంచవర్ష ప్రణాళికలకు కావలసిన దత్తాంశాన్ని సేకరించే దృష్ట్యా రాష్ట్ర బ్యూరోలను పటిష్టం చేయడము, జిల్లా సాంఖ్యక కార్యాలయాలను ఏర్పాటు చేయడమూ జరిగింది. జాతీయ శాంపుల్ సర్వే సంస్థ

నిర్వహించే శాంపుల్ సర్వే పథకాలను రచన, రూపణ, CSO ద్వారానే జరుగుతాయి. రాష్ట్రస్థాయిలోని ప్రచురణలను CSO పరిశీలించి, సూచనలను ఇస్తుంది. ప్రణాళికా సంఘానికి సాంఖ్యక పరంగా అవసరమయ్యే సమాచారాన్ని CSO అందజేస్తుంది. సాంఖ్యకాధికారులకు CSO సాంకేతిక శిక్షణ ఇస్తుంది.

CSO కొన్ని ముఖ్య ప్రచురణలు

1. Weekly Supplement to the Monthly Abstract of Statistics 2. Monthly Abstract of Statistics 3. Statistical Hand Book of the Indian Union (A) 4. Statistical Abstract of India (A) 5. Estimates of National Income (A) 6. Sample Survey of Current interest in India (A) 7. Report of the Activities of CSO (A) 8. Basic Statistics Relating to Indian Economy (A) 9. Annual Survey of Industries 10. Monthly Statistics of Productions of selected Industries in India 11. Statistical system in India (adhoc - 1965) 12. Index of Industrial Production (M) 13. Key to Current Official Statistics (adhoc -1957) 14. Key to Statistics of Indian Economy (adhoc -1967) 15. Indian Official Statistical Directory (adhoc - 1961) 16. Selected Plan Statistics (adhoc - 1959).

4.5 జాతీయ శాంపుల్ సర్వే (National Sample Survey - NSS)

4.5.1 NSS స్థాపనలో ఉద్దేశాలు, విధులు (Objectives and functions of NSS)

1. దేశంలోని ఆర్థిక, సామాజిక, జన సాంఖ్యక పరిస్థితులకు సంబంధించిన విస్తారమైన దత్తాంశాన్ని (Opmprehensive data) పరంపరంగా సేకరించడం, ప్రస్తుతం లభిస్తున్న వివరాలలోని లోటుపాట్లను భర్తీచేయడం, జాతీయ ఆదాయాన్ని అంచనా వేయడానికి, ప్రణాళికల రచనకూ నిర్వహణకూ, ఇంకా వివిధ మంత్రిత్వశాఖల పరిపాలన నిర్వహణలో తీసుకొనవలసిన నిర్ణయాలకు, కావలసిన దత్తాంశాన్ని అందించడం.
2. పారిశ్రామిక రంగంలో పెట్టుబడి, ఉద్యోగిత వినియోగం ఉత్పత్తి మొదలైన విషయాలను పరిశీలించడానికి పనికివచ్చే సర్వేలను, విచారణలను రూపొందించి, అమలు జరపడం.
3. రాష్ట్ర ప్రభుత్వాలు, వ్యవసాయ రంగంలో నిర్వహించే సర్వేలకు కావలసిన శిక్షణను సాంకేతిక సహాయాన్ని అందించడం

ఈ మూడు NSS స్థాపనలోని ముఖ్య ఉద్దేశాలు.

4.5.2 NSS పనిచేసే విధానం (Organisation)

పై మూడు ఉద్దేశాలకు అనుగుణంగా NSS లో మూడు ముఖ్య విభాగాలు ఉన్నాయి.

1. ఆర్థిక, సామాజిక రంగాలలో బహుళార్థ సాధక సర్వేలను (Multi Power Surveys) నిర్వహించే విభాగం.
2. పారిశ్రామిక సాంఖ్యక వివరాల విభాగం
3. వ్యవసాయ సాంఖ్యక వివరాల విభాగం

1వ, 2వ విభాగాల సహాయంతో సర్వేలను నిర్వహిస్తారు. 3వ విభాగం వారు రాష్ట్రాలు జరిపే సర్వేలకు కావలసిన సహాయం మాత్రం చేస్తారు. NSS వ్యవస్థలో ప్రస్తుతం 2000పైగా ఉద్యోగులున్నారు. వీరు నిర్వహించే కార్యకలాపాలకు CSO, ISI ల సహాయం కూడా ఉంటుంది. నిర్వహించదలచిన సర్వేల రచనను రూపొందించడం, ఏది ముందు ఏది తరువాత అన్న నిర్ణయం చేయడం వంటి వాటిని CSO చేస్తుంది. సేకరించిన దత్తాంశాన్ని సమీకరించడం, కూర్చడం, పట్టికలను తయారుచేయడం, విశ్లేషణ, గణన రిపోర్టు (నివేదిక)లను తయారు చేయడం మొదలైన పనులను ISI చేస్తుంది. రాష్ట్ర ప్రభుత్వాలు, కొన్ని ప్రయివేట్లు పరిశోధనా సంస్థలు (Gokhale Institute of Economics and Politics వంటివి) ఈ సర్వేల నిర్వహణలో ఎంతో సహాయాన్ని అందజేస్తాయి. వీటన్నిటి వల్ల NSS తన సర్వేలను నిర్వహిస్తుంది.

కొంత నిర్దిష్ట ప్రయోజనాన్ని అనుసరించి, ప్రతి సంవత్సరం పరంపరగా, దఫాల వారిగా (rounds) సర్వేలను జరిపేటట్లు NSS రూపొందించబడింది. 1984 వరకు NSS వారు 39 రౌండ్లు (rounds) నిర్వహించారు. 39వ రౌండులోని సర్వేలో జనాభా, జనన మరణాలు ముఖ్య విషయాలుగా తీసుకోవడమైంది. 419 గ్రామాలలో ధరల మీద కూడా విచారణ జరిపారు. ప్రతి రెండు పూర్తయిన తరువాత సర్వేలోని విషయాలపై ఒక రిపోర్టును ప్రచురిస్తారు.

NSS సంస్థ మనదేశంలోని సాంఖ్యక వ్యవస్థలో అతిముఖ్య భాగంగా రూపొందింది. మనదేశంలో భారీఎత్తున విశ్వసనీయ దత్తాంశానికి ప్రత్యేక కృషి జరిపే సంస్థలలో NSS వారిది ప్రథమ స్థానం అంటే అతిశయోక్తి లేదు.

4.6 **Directorate of Economics and Statistics, Government of Andhra Pradesh (APDES):** ఆంధ్రప్రదేశ్ రాష్ట్ర ప్రభుత్వ ఆర్థిక, గణాంక, విషయముల సంచాలకుని కార్యాలయము : ఇది ఆంధ్రప్రదేశ్ రాష్ట్ర ప్రభుత్వమునకు సంబంధించిన ఒక కేంద్రీకృత గణాంక వ్యవస్థ, రాష్ట్ర ఆర్థిక వ్యవస్థకు చెందిన వివిధ రంగముల నుండి దత్తాంశమును సేకరించి, దానిని కూర్చడం, విశ్లేషణ చేయడం దీని ముఖ్య ఉద్దేశం.

4.6.1 APDES విధులు (Functions)

(i) వ్యవసాయక, పారిశ్రామిక, ధరల వంటి ముఖ్యమైన రంగాల గణాంకాలను తయారు చేస్తుంది.

(ii) రాష్ట్ర ఆదాయపు అంచనాను తయారు చేస్తుంది.

(iii) జాతీయ శాంపుల్ సర్వే సంస్థకు రాష్ట్రం తరపున అవసరమయిన ప్రతిరూపములను సేకరించి పంపిస్తుంది.

(iv) రాష్ట్రంలోని జిల్లాల స్థాయిలో పంచవర్ష ప్రణాళికల, వార్షిక ప్రణాళికల రచనా బాధ్యతను వహిస్తుంది. మరియు కొన్ని ప్రణాళికా పథకముల ఫలితములను గమనించుట. పున: పరిశీలన గావించుట వంటి బాధ్యతను కూడా వహిస్తుంది.

4.6.2 **APDES** సంస్థాపరమైన స్వరూపము **(Organisational Setup)**

ఈ Directorate of Economics and Statistics ను ప్రస్తుత భారతదేశ స్థాయిలో జాతీయ గణాంక వ్యవస్థ (National Statistical System) అనీ మన రాష్ట్ర స్థాయిలో ఆంధ్రప్రదేశ్ గణాంక వ్యవస్థ అని పిలుస్తున్నారు.

ప్రధాన కార్యస్థానము : ప్రధాన కార్యస్థానము రాష్ట్ర రాజధాని హైదరాబాదులో ఉంది. ఈ ప్రధాన కార్యస్థానములో సంచాలకులు ఒకరు, ఐదుగురు సంయుక్త సంచాలకులు (Joint Directors), 7గురు ఉప (Deputy) సంచాలకులు 16 మంది సహాయ (Assistant) సంచాలకులు, ఐదుగురు గణాంక అధికారులు (Statistical Officers) మరియు ఒక పత్రీకరణ (Documentation) అధికారి పని చేసారు. వీరేగాక 397 మంది నాన్ - గజిటెడ్ సాంకేతిక (Technical) మరియు మినిస్టీరియల్ సిబ్బంది కూడా ఈ కార్యాలయంలో ఉన్నారు.

జిల్లాస్థాయి కార్యాలయము : రాష్ట్రంలోని ప్రతి జిల్లాలోను "జిల్లా ప్రణాళికా కార్యాలయము" ఉంది. దీనిలో ఒక ప్రధాన ప్రణాళికా అధికారి (ఉప సంచాలకుని హోదాలో) ఉన్నారు. ఆయనకు ఒక సహాయ సంచాలకుడు, ఒక గణాంక అధికారి, మరియు 15 మంది సాంకేతిక మినిస్టీరియల్ సిబ్బంది సహాయపడతారు.

జిల్లా యందలి స్వరూపము : పూర్వము గల తాలుకాలు, బ్లాకులో పనిచేస్తున్న గణాంక వేత్తలను (Statisticians) ప్రస్తుతం మాండలీక వ్యవస్థలో ఉన్న మండల ప్రధాన కార్యాలయములో నియమించారు. "సమగ్ర పంటల భీమాపథకం" కింద రాష్ట్రంలో గల 1104 మండలములలో ప్రతి మండలానికి ఒక గణాంకవేత్తను నియమించారు. ఈ గణాంకవేత్త వ్యవసాయము, వర్షపునీరు, ధరలు మొదలగు అంశాలపై దత్తాంశ సేకరణ చేసిదానిని గూర్చి, జిల్లా ప్రధాన కార్యాలయానికి సమాచారాన్ని తెలియజేస్తారు. ఇంకా కొన్ని పంటలపై పంటకోత ప్రయోగాలు (Crop cutting Experiments) నిర్వహిస్తారు. "సమగ్ర పంటల భీమాపథకము" కింద ఒక ఉప గణాంక సంబంధిత పనులపై అధికారిని కూడ ప్రతి రెవిన్యూ డివిజన్ కార్యాలయములో నియమించారు. వీరు అన్ని గణాంక

సంబంధిత పనులపై విచారణ చేస్తారు. ముఖ్యముగా పంటకోత పరీక్షలను నిర్వహించే వివిధ సంస్థలకు సహాయ సహకారములను అందిస్తారు. ఈ ఉప గణాంక అధికారి మండల రెవిన్యూ కార్యాలయానికి , ప్రధాన, ప్రణాళిక కార్యాలయానికి మధ్య సంవిధాన కర్తగా వ్యవహరిస్తూ, సకాలంలో దత్తాంశాన్ని మండల కార్యాలయుంల నుండి జిల్లా కార్యాలయాలకు చేరడానికి దోహదపడతారు.

ప్రధాన ప్రణాళిక అధికారి (Chief Planning Officer) :

ఈ ప్రధాన ప్రణాళిక అధికారి తమ సిబ్బంది సహాయ సహకారంతో గణాంకపరమైన కార్యకలాపాలు చూస్తు, జిల్లా కలెక్టరుకు, జిల్లాప్రణాళిక మండలి, తెలుగు గ్రామీణ క్రాంతిపథం వంటి వివిధ పథకాలకు నిధులు కేటాయింపు వంటి విషయములలో సహాయపడతారు. జిల్లాకు సంబంధించిన్న పంచవర్ష ప్రణాళికలు, వార్షిక ప్రణాళికలను తయారు చేయడం, వివిధ వార్షిక ప్రణాళిక పథకాల నిర్వహణ తీరుతెన్నులు గమనించడం వాటిలో మార్పులు చేర్పులు అవసరమయినపుడు సూచించడం మొదలైన కార్యనిర్వహణ బాధ్యతలు వహిస్తారు.

అభ్యాసము

I. ఈ క్రింది వానికి సంక్షిప్తంగా జవాబులు రాయండి ?

1. గణాంక శాస్త్రం ఏవిధంగా ఆరంభమైందో విశదీకరించండి.
2. గణాంక శాస్త్రాన్ని 'రాజుల శాస్త్రం' అనే వారు ఎందువల్ల?
3. ఆహార వ్యవసాయ మంత్రిత్వ శాఖలో సాంఖ్యత విభాగం గూర్చి రాయండి.
4. వ్యాపార పారిశ్రామిక మంత్రిత్వ శాఖలో సాంఖ్యక విభాగం గూర్చి రాయండి.

II. ఈక్రింది వానికి విపులంగా జవాబులు రాయండి.

1. ప్రాచీన కాలం నుండి మన దేశంలో గల్ల సాంఖ్యక వ్యవస్థను చర్చించండి.
2. కేంద్ర ప్రభుత్వములోని వివిధ మంత్రిత్వశాఖలలో గల సాంఖ్యక విభాగాల పనులను గూర్చి తెలపండి.
3. Indian Statistical Institute మరియు Indian Agriculture Statistics Research Institute గురించి రాయండి.
4. కేంద్రీయ సాంఖ్యక సంస్థ (CSO) యొక్క ముఖ్యమైన విదులు, సంస్థలోని ముఖ్య భాగాలను గూర్చి రాయండి.
5. ఆంధ్రప్రదేశ్ రాష్ట్రములోని గణాంక వ్యవస్థ యొక్క విధులు, సంస్థాపరమైన స్వరూపము గూర్చి తెలుపండి.
6. జాతీయ శాంపుల్ సర్వేను గూర్చి మరియు ఇది పనిచేసే విధానం గురించి తెలుపండి.

పాఠం - 5

సగటులు-I (AVERAGES - I)

ఉద్దేశ్యం(Objectives) :- ఈ పాఠ్యాంశాన్ని అధ్యయనం చేయడం వలన మీరు

1) సగటు లేదా కేంద్ర స్థానపు కొలత (Measure of central Tendency) అంటే ఏమిటి ?
2) సగటు యొక్క ఉద్దేశాలు, లక్షణాలు ఏమిటి?
3) వివిధ రకాల సగటులు ఏవి ?
4) సగటుల గుణదోషాలు ఏమిటి ?

అనే విషయాల గురించి వివరంగా తెలుసుకొనగలరు.

నిర్మాణం (Structure) :

5.1 సగటు అర్థం, ప్రాముఖ్యం (Meaning and Importance of Average)

మానవ మేధస్సు ఎక్కువ సంఖ్యలో ఉన్న గణాంకాలన్నింటినీ జ్ఞాపకం ఉంచుకోలేదు. కాబట్టి అన్ని అంకెలకు ప్రాతినిధ్యం వహించే ఒకటి రెండు అంశాల అవసరం ఎంతైనా ఉంది. "ఎక్కువ దత్తాంశాన్ని స్వీకరించలేనటువంటి మానవ మేధస్సు యొక్క నిస్సహాయత తక్కువ స్థిరాంకలలో (Constants) దత్తాంశాన్ని విపులంగా వర్ణించగల పద్ధతి కనుగొనడానికి ప్రోత్సహించింది" అని గణాంక శాస్త్రవేత్తలలో

మేటి అయిన "ఇర్వింగ్‌ఫిషర్" అన్నాడు. (The inherent inactivity of the human mind to grasp in its entirety a large body of the numerical data compells us to seek relatively few constants that will adequately describe data-Irving fisher)

ఎ.ఇ.వా (A.E. Waugh) ప్రకారం "విలువల సముదాయం నుండి వాటికి ప్రాతినిధ్యం వహించేటట్లు ఎంపికచేసిన ఒకే ఒక విలువే సగటు విలువ." ఉదాహరణకు ఒక తరగతిలోని 50 మంది విద్యార్థులు మార్కులు ఇచ్చి, మరొక తరగతిలోని 50 మంది విద్యార్థుల మార్కులిచ్చి రెండు తరగతులలోని విద్యార్థుల మార్కులను ప్రత్యక్షంగా సరిపోల్చి చెప్పమంటే, ఒక నిర్ణయానికి రావటం చాలా కష్టమవుతుంది. అలాగాక ఒక్కొక్క తరగతి యొక్క శ్రేణులకు ప్రాతినిధ్యం వహించే సంఖ్యను తీసుకుంటే, సరిపోల్చడం చాలా సులభమవుతుంది. మొత్తం శ్రేణులకు ప్రాతినిధ్యం వహించే అటువంటి సంఖ్యనే "సగటు" అంటారు. ఒక కళాశాల అధ్యాపకుడు తాను బోధించే నాలుగు తరగతులలోని 400 మంది మార్కులను గుర్తుంచుకొనలేడు. అదేవిధంగా ఒక దేశపు ఆర్థికశాఖామంత్రి తన దేశంలోని వివిధ రకాల పౌరులు వ్యక్తిగత ఆదాయాలను గుర్తుంచుకొని, ఆర్థిక విదానాన్ని రూపొందించలేడు. కాబట్టి వారికి కావలసింది ఏమిటంటే అధ్యయన విషయంలోని ముఖ్యాంశం మీద దృష్టిని కేంద్రీకరించడానికి ప్రాతినిధ్యం వహించే ఏకైక వర్ణనాంశపు అంకె. అంతేకాక దత్తాంశంలోని వివిధ అంశాల విలువలు ఆ అంకెకు దగ్గరలో ఉండవలె, ఈ కారణం చేతనే ప్రాతినిధ్యం వహించే సంఖ్యను "సగటు" లేదా "కేంద్ర స్థానపు కొలత" అంటారు. మనం ప్రతినిత్యం సగటు అనే పదాన్ని ఎక్కువగా వాడుతుంటాము. ఉదాహరణకు సగటుజీతం, సగటు విద్యార్థి, సగటు మార్కులు, సగటు ఎత్తు, సగటు బరువు మొదలైనవి. సాధరణంగా దత్తాంశములోని అంశాల విలువలు సగటు చుట్టూ గుమిగూడి, అత్యధిక, అత్యల్ప విలువలకు మధ్యస్థంగా ఉంటాయి.

5.2. సగటు ఉద్దేశాలు (Objectives of Average) :

సగటు ఉద్దేశాలను క్రింది విధంగా పేర్కొనవచ్చును.

1) దత్తాంశ లక్షణాలకు ప్రాతినిధ్యం వహించే ఒకే విలువ కనుగొనడం :- ఎక్కువ అంకెలు గల దత్తాంశాన్ని సంక్షిప్త పరచడం ద్వారా ఒకే విలువను పొందడం వలన మొత్తం దత్తాంశపు స్వరూపాన్ని పొందడానికి సగటు తోడ్పడుతుంది.

2) దత్తాంశాన్ని సులభంగా పోల్చడం :- సగటు వలన సరిపోల్చే పద్ధతి సులభమవుతుంది.
ఉదాహరణకు : 2001-2002 లో ఒక కళాశాల విద్యార్థుల సగటు ఉత్తీర్ణతను మరొక కళాశాల విద్యార్థుల సగటు ఉత్తీర్ణతతో పోల్చి, కళాశాల స్థాయిలను అంచనావేయవచ్చును.

3) గణితీయ సంబంధాన్ని (Mathematical Relation) కనుగొనడం :- సగటు విలువలను సంఖ్యాత్మకంగా చెప్పడం వలన, వివిధ వర్గాల మధ్య గణితీయ సంబంధాన్ని విశదీకరిస్తాయి. ఉదాహరణకు భారతీయుల తలసరి ఆదాయం కంటే అమెరికన్ల తలసరి ఆదాయం ఎక్కువ అని మనకు తెలిస్తే, అందువల్ల సరైన అర్థంరాదు. ఎందుచేతనంటే దానిని ఒక అంకెద్వారా తెలియజేయడం జరగలేదు. అయితే రెండింటి విలువను అంకెలుగా చెబితే, అవి ఖచ్చితమైన అర్థాన్ని చెబుతాయి.

4) "సగటు" దత్తాంశాన్ని కుదించి చెబుతుంది. 100 మంది విద్యార్థుల మార్కులను, గుర్తుంచుకోవడం కంటే వారి సగటు మార్కులను గుర్తుంచుకోవడం తేలిక.

5) విధాన నిర్ణయాలతో తోడ్పడటం :- సగటులు వివిధ రంగాల్లో విధాన నిర్ణయానికి తోడ్పడతాయి. (Standads) ప్రమాణాలు నిర్ణయించడానికి, అంచనాలు వేయడానికి, ప్రణాళికలు తయారు చేయడానికి, ఇతరత్రా నిర్వహణ పరమైన నిర్ణయాలు చేయడానికి సగటులు సహాయ పడతాయి. ఉదాహరణకు :- సగటు ఉత్పత్తి, సగటు అమ్మకాలు, సగటువ్యయం, సగటు వేతనాలు మొదలైనవి విధాన నిర్ణయాలలో ఉపయోగపడతాయి.

5.3 మంచి సగటుకు ఉండవలసిన లక్షణాలు (Requisites of a Good Average)

యూల్, కెండాల్ (Yule, Kendall) ప్రకారం మంచి సగటుకు క్రింది లక్షణాలు ఉండవలె.

1) నిర్వచనం స్పష్టంగా ఉండి ఒకే అర్థం ఇవ్వాలి.

2) అర్థం చేసుకోవడానికి సులభంగాను, అనుసరించడానికి తేలికగాను ఉండవలె.

3) అన్ని అంశాలకు ప్రాతినిధ్యం వహించవలె. సగటును లెక్కకట్టేటప్పుడు ఏ ఒక్క అంశాన్ని వదలి వేసిననూ సగటు విలువలో మార్పురావలె.

4) తేలిక.గా గణన చేయడానికి, సులువుగా అర్థం చేసుకోవడానికి వీలుగా ఉండి, యదార్థతను అలక్ష్యం చేయరాదు.

5) ఏదైనా ఒకే ఒక అంశం సగటుపై ప్రభావాన్ని చూపరాదు. అనగా అతితక్కువ, అతిఎక్కువ విలువల ప్రభావం వలన సగటు పెద్దగా మార్పు చెందరాదు.

6) బీజీయ ప్రస్తావనకు అవకాశం ఉండవలె.

7) సగటులు ప్రతిచయనాల మార్పులకు ఎక్కువగా ప్రభావితం కారాదు. రెండు ప్రతిచయనాలు తీసుకున్నప్పుడు, ప్రతిచయనాల సగటులు పరస్పరం దగ్గరగా ఉండాలి. ప్రతిచయనంలోని మార్పులకు అతి తక్కువగా ప్రభావితమైన సగటును మంచి సగటుగా భావించాలి.

5.4 సగటులలో రకాలు (Types of Averages) :- సగటులు ముఖ్యముగా అయిదు రకములు. అవి

i) అంక మధ్యమము (Arithmetic Mean)

ii) మధ్యగతము (Median)

iii) బాహుళకము (Mode)

iv) గుణమధ్యమము (Geometric Mean)

v) హరమధ్యమము (Harmonic Mean)

వీటిలో అంకమధ్యమం, గుణమధ్యమం, హరమధ్యమం అనే మూడు గణన చేయగా అనగా లెక్కించగా వచ్చిన సగటులు (Calculated Averages) మిగిలిన రెండూ అనగా "మధ్యగతం" మరియు "బాహుళకం" అనేవి స్థాన నిర్ణయ సగటులు (Positional Averages)

5.5 అంకమధ్యమము (Arithmatic Mean)

సాధారణ పరిభాషలో ప్రతిరోజూ ఉపయోగించే పదము "సరాసరి లేదా సగటు"ను గణాంకశాస్త్ర పరిభాషలో (Statistical Terminology) "అంకమధ్యమం" (Arithmatic Mean) అంటారు. దీనినే "మధ్యమము " (Mean) అని కూడా అంటారు. అత్యధికంగా ఉపయోగపడి అతిప్రాముఖ్యాన్ని పొందిన సగటు ఇది. తరచుగా వినబడే "సగటురాబడి", "సగటు మార్కులు" మొదలైన పదాలు అంకమధ్యమానికి మారు పేర్లని భావించవలె.

అంకమధ్యమం రెండు రకములు. 1) సాధారణ లేదా-సామాన్య అంకమధ్యమం(Simple Arithmatic Mean) 2) భారిత అంకమధ్యమం (Weighted Arithmatic Mean)

1) సాధారణ లేదా సామాన్య అంకమధ్యమం(Simple Arithmatic Mean) : మామూలు పరిభాషలో సాధారణ అంక మధ్యమం అనగా రాశుల మొత్తాన్ని రాశుల సంఖ్యచేత భాగించగా వచ్చే ఫలితము.

అంకమధ్యమం = రాశుల మొత్తం / రాశుల సంఖ్య

"సిప్సన్, కాఫ్కా" (Simpson, Kafka) అభిప్రాయం ప్రకారం, అంశాల మొత్తాన్ని "అంశాల సంఖ్యచే భాగిస్తే వచ్చే ఫలితమే అంకమధ్యమం' ' (The Arithmatic Mean is the quotient that results, "When the Sum of all the items in the Series is divided by numbur of items")

యాలున్ (Ya-Lun-Chow) అభిప్రాయం ప్రకారం, అంకమధ్యమం అంటే "ప్రతిచయనంలోని పరిశీలనాంశాల మొత్తాన్ని అదే ప్రతిచయనంలోని పరిశీలనాంశాల సంఖ్య చేత భాగించడం," ("The Sum of observations in a sample divided by the number of Observations in the sample"). అంకమధ్యమాన్ని వ్యక్తిగత, విచ్ఛిన్న, అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులకు సంబంధించిన దత్తాంశమునకు గణన చేస్తారు.

వ్యక్తిగత శ్రేణులు - అంకమధ్యమం ("Individual Series - Arithmatic Mean")

వ్యక్తిగత శ్రేణులలో అంకమధ్యమాన్ని రెండు పద్ధతుల ద్వారా లెక్కిస్తారు.

a) ప్రత్యక్ష పద్ధతి (Direct Method) b) దగ్గర పద్ధతి (Short Cut Method)

ప్రత్యక్ష పద్ధతి (Direct Method) : రాశుల మొత్తాన్ని రాశుల సంఖ్య చేత భాగింపగా వచ్చిన ఫలితాన్ని అంకమధ్యమం అంటారు. అంక మధ్యామాన్ని 'a' అనే అక్షరంతో సూచిస్తారు. (దీనిని $\overline{X}$ (X బార్) అని కూడా అంటారు) దత్తాంశంలోని ప్రతి విలువను లేదా అంశాన్ని లేదా చలనాన్ని లేదా రాశిని 'X' గా సూచిస్తే, అటువంటి విలువలను కూడగా వచ్చిన మొత్తమును "ΣX" అంటారు. ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో అంక మధ్యమం సూత్రం ఇలా ఉంటుంది.

$a = \frac{\Sigma x}{N}$ a = అంకమధ్యమం, Σx = రాశుల మొత్తం, N = రాశుల సంఖ్య.

<u>ఉదాహరణ</u> :- క్రింది దత్తాంశానికి అంకమధ్యమం కనుగొనండి.:

కార్మికుల క్రమ సంఖ్య :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
రోజువారి వేతనాలు (రూ):	75	43	57	21	49	39	80	12	95	59

జవాబు :- అంక మధ్యమం లెక్కించుట :-

కార్మికుల క్రమ సంఖ్య	వేతనాలు (రూ)
1	75
2	43
3	57
4	21
5	49
6	39
7	80
8	12
9	95
10	59
N = 10	$\Sigma x = 530$

$a = \frac{\Sigma x}{N}$

a = అంకమధ్యమం

Σx = చలనాల మొత్తం

N = చలనాల సంఖ్య

$a = \frac{530}{10}$ = రూ. 53/-

b) దగ్గర పద్ధతి - వ్యక్తిగత శ్రేణులు - అంకమధ్యమం (Short cut Method - Individual Series - Arithmetic Mean)

దగ్గర పద్ధతిలో అంకమధ్యమాన్ని లెక్కించడానికి క్రింది పద్ధతిని పాటించవలె.

1) అంశాలలో ఒక దానిని సగటుగా ఎంచుకోనవలె. ఆ విలువను ఊహించిన సగటు అంటారు. దానిని X అంటారు.

2) ఊహించిన సగటు నుండి ఇతర చలనాలకు విచలనాలు లెక్కించవలె. అనగా ఊహించిన సగటుకు, ఇతర చలనాలకు గల తేడాను కనుగొనవలె. దానిని dx అంటారు.

3) విచలనాలను కూడవలె. ఆ మొత్తమును Σdx అంటారు.

4) విచలనాల మొత్తమును (Σdx ను) అంశాల సంఖ్యతో (N) భాగించి, వచ్చిన ఫలితాన్ని ఊహించిన సగటుకు (x) కలుపవలె. ఈ విధంగా కనుగొన్న విలువ అంకమధ్యమం అవుతుంది.

అనగా $a = x + \frac{\Sigma dx}{N}$

ఉదాహరణ : 2

కార్మికుల సంఖ్య	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
రోజువారి వేతనాలు రూ.	75	43	57	21	49	39	80	12	95	59

జవాబు :

వరుస సంఖ్య	x	dx
1	75	+26
2	43	- 6
3	57	+8
4	21	-28
5	x = 49	-0
6	39	-10
7	80	+31
8	12	-37
9	95	+46
10	59	+10
N = 10		+121
		- 81
	$\Sigma dx =$	+40

ఊహించిన సగటు x = 49

$$a = x + \frac{\Sigma dx}{N}$$

$x = 49$; $\Sigma dx = 40$; $N = 10$

$$a = 49 + \frac{40}{10}$$

$a = 49 + 4$ = రూ 53/-

ఉదాహరణ : 3

ఒక తరగతిలోని 10 మంది విద్యార్థుల మార్కులు క్రింది విధంగా ఉన్నాయి. అంకమధ్యమం కనుగొనండి.

విద్యార్థుల క్రమ సంఖ్య	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
విద్యార్థుల మార్కులు	12	17	21	14	16	18	10	9	23	15

జవాబు :-

వరుస సంఖ్య	x	dx
1	12	-4
2	17	+1
3	21	+5
4	14	-2
5	16	0
6	18	+2
7	10	-6
8	9	-7
9	23	+7
10	15	-1
N = 10		+15
		-20
		$\Sigma dx = -5$

ఊహించిన సగటు x = 16

$$a = x + \frac{\Sigma dx}{N}$$

$x = 16$; $\Sigma dx = -5$; $N = 10$

$$a = 16 + \frac{-5}{10} = 16 - 0.5 = 15.5$$ మార్కులు

గమనిక : ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో లెక్కిచిననూ, దగ్గర పద్ధతిలో లెక్కించిననూ అంకమధ్యమము ఒకే విధంగా ఉంటుంది.

5.6 విచ్ఛిన్న - శ్రేణులు - అంకమధ్యమం (Discrete Series - Arithmetic mean)

విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో కూడా అంక మధ్యమాన్ని ప్రత్యక్ష పద్ధతి ద్వారా మరియు దగ్గర పద్ధతి ద్వారా కనుగొనవచ్చును.

ప్రత్యక్ష పద్ధతి :- (Direct method) ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో విచ్ఛిన్న శ్రేణి నుండి అంకమధ్యమం గణించడానికి.

1) అంశాలను వాటి కెదురుగా ఉన్న పౌనఃపున్యంతో హెచ్చించవలె. (xf)

2) హెచ్చించగా వచ్చిన ఫలితాలను కూడవలె. (Σxf)

3) కూడగా వచ్చిన మొత్తము (Σxf) ను పౌనఃపున్యపు మొత్తముచే (N) భాగించవలె. వచ్చే ఫలితాన్ని అంకమధ్యమం అంటారు.

అనగా $a = x + \frac{\Sigma dx}{N}$; a = అంకమధ్యమము. Σxf = చలనాలను (x) వాటికి ఎదురుగా ఉన్న పౌనఃపున్యం తో హెచ్చించగా వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తము. N = పౌనఃపున్యము మొత్తము.

ఉదాహరణ . 5 : ఒక తరగతిలోని 100 మంది విద్యార్థుల మార్కులు క్రింది విధంగా ఉన్నాయి. సగటు మార్కులు కనుగొనండి.

మార్కులు :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
విద్యార్థుల సంఖ్య :	3	7	8	12	13	17	15	10	9	4	2

జవాబు :-

మార్కులు x	విద్యార్థులు f	xf	
0	3	0	(0×3)
1	7	7	(1×7)
2	8	16	(2×8)
3	12	36	(3×12)
4	13	52	(4×13)
5	17	85	(5×17)
6	15	90	(6×15)
7	10	70	(7×10)
8	9	72	(8×9)
9	4	36	(9×4)
10	2	20	(10×2)
	N = 100	Σxf = 484	

$a = \frac{\Sigma xf}{N}$

$\Sigma xf = 484$; N = 100

$a = \frac{484}{100}$

= 4. 84 మార్కులు

దగ్గర పద్ధతి **(Shortcut method)**

దగ్గర పద్ధతిలో అంకమధ్యమాన్ని లెక్కించడానికి క్రింది పద్ధతిని అనుసరించవలె.

1) అంశాలలో ఒక దానిని సగటుగా తీసుకోనవలె. దానిని ఊహించిన సగటు "X" అంటారు.

2) ఊహించిన సగటు నుండి ఇతర విలువలకు విచలనాలు లెక్కించవలె. అనగా ఊహించిన సగటుకు, ఇతర చలనాలకు గల తేడాను కనుగొనవలె. దానిని dx అంటారు.

3) విచలనాలను (dx) వాటికెధ్ధురుగా ఉన్న పౌనఃపున్యం (f) తో హెచ్చించవలె. దానిని fdx అంటారు.

4) Σfdx ను పౌనఃపున్యం మొత్తం (N) చే భాగించి, వచ్చిన ఫలితాన్ని ఊహించిన సగటు (x) కు కలుపవలె. ఈ విధంగా కనుగొన్న విలువ అంకమధ్యమం అవుతుంది. అనగా

$$a = x + \frac{\Sigma fdx}{N}$$

a = అంకమధ్యమము x = ఊహించిన సగటు

Σfdx = ఊహించిన సగటు నుండి తీసిన విచలనాలను, వాటి పౌనఃపున్యంతో హెచ్చించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తము.

N = పౌనఃపున్యపు మొత్తము.

ఉదాహరణ. 6 :- ఒక తరగతిలోని 100 మంది విద్యార్థుల మార్కులు క్రింది విధంగా ఉన్నాయి. సగటు మార్కులు కనుగొనండి.

మార్కులు	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
విద్యార్థుల సంఖ్య	3	7	8	12	13	17	15	10	9	4	2

జవాబు :

మార్కులు x	విద్యార్థులు f	dx	fdx
0	3	-5	-15
1	7	-4	-28
2	8	-3	-24
3	12	-2	-24
4	13	-1	-13
x = 5	17	0	0
6	15	+ 1	15
7	10	+2	20
8	9	+3	27
9	4	+4	16
10	2	+5	10
	N = 100		- 104 + 88 -16

ఊహించిన సగటు x = 5

$$a = x + \frac{\Sigma fdx}{N}$$

x = 5 ; Σfdx = - 16 , N = 100

$$a = 5 + \frac{-16}{100}$$ = 5 - 0.16 = 4. 84 మార్కులు

గమనిక : ప్రత్యక్ష పద్ధతిలోనైననూ, దగ్గర పద్ధతిలోనైననూ జవాబు ఒకటిగానే ఉంటుంది.

ఉదాహరణ. 7 : ఒక ఫ్యాక్టరీలో పనిచేయుచున్న 100 మంది కార్మికులు దినసరి వేతనం క్రింది విధంగా ఉంది. సగటు వేతనం కనుగొనండి.

వేతనం - రూ॥ లో	10	15	20	25	30	35	40	45	50
కార్మికుల సంఖ్య	7	9	12	13	18	16	14	7	4

జవాబు :

వేతనం	కార్మికుల సంఖ్య	dx	fdx
10	7	- 20	-140
15	9	-15	-135
20	12	-10	-120
25	13	-5	-65
30	18	0	0
35	16	+5	80
40	14	+10	140
45	7	+15	105
50	4	+20	80
	N = 100		+405 - 460 Σfdx - 55

ఊహించిన సగటు x = 30

$$a = x + \frac{\Sigma fdx}{N}$$

$$= 30 + \frac{-55}{100}$$

= 30 - 0.55 = రూ. 29.45

సోపాన విచలనాలు (Step - Deviations)

ఉదాహరణ 7 లోని విచలనాలకు. ఒక సమాన లక్షణము (Common factor) కనిపిస్తుంది. అది 5. దానినే "సమాన అంతరం" అంటారు. విచలనాలను సమాన అంతరంతో భాగిస్తే వచ్చే విచలనాలను 'సోపాన విచలనాలు' అంటారు.

సోపాన విచలనాల పద్ధతిలో అంకమధ్యమం లెక్కించడానికి సూత్రం క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

$$a = x + \frac{\Sigma fdx}{N} \times i$$ ఇక్కడ a = అంకమధ్యమం; X = ఊహించిన సగటు.

Σfdx = ఊహించిన సగటు నుండి లభ్యమైన సోపాన విచలనాలను వాటి పౌనఃపున్యంతో గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తము.

N = పౌనఃపున్యపు మొత్తము; i = విచలన సమాన అంతరము.

ఉదాహరణ 8. : 100 మంది కార్మికుల రోజువారీ వేతనం క్రింది విధంగా ఉంది. సగటు వేతనం కనుగొనండి.

వేతనం రూ. :	10	15	20	25	30	35	40	45	50
కార్మికుల సంఖ్య	7	9	12	3	18	16	14	7	4

జవాబు :- సోపాన విచలనాల పద్ధతి :

x	f	dx	fdx
10	7	-4	-28
15	9	-3	-27
20	12	-2	-24
25	12	-2	-24
30	18	0	0
35	16	+1	16
40	14	+2	28
45	7	+3	21
50	4	+4	16
	N = 100		+81
			-92
			Σfdx - 11

ఊహించిన సగటు = X = 30

$$a = x + \frac{\Sigma fdx}{N} \times i$$

X = 30; Σfdx = -11 ; N = 100 ; i = 5

$$a = 30 + \frac{-11}{100} X 5$$

= 30 - 0. 55 = రూ. 29.45

5.7 అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు

అంకమధ్యమము (Continuous Series - Arithmetic Mean)

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో ఆయా తరగతుల యొక్క దిగువ అవధిని (Lower limit) ఎగువ అవధిని (Upper limit) కూడి 'రెండు' చే భాగిస్తే వివిధ తరగతుల అంతరాల "మధ్య బిందువులు" వస్తాయి. మధ్య బిందువులను ఆధారంగా తీసుకొని, విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో ఉపయోగించిన సూత్రాలనే ఉపయోగించి అంకమధ్యమం లెక్కించవలె. అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో కూడా అంకమధ్యమాన్ని ప్రత్యక్ష పద్ధతిలోను మరియు దగ్గరి పద్ధతిలోను లెక్కిస్తారు.

ప్రత్యక్ష పద్ధతి (Direct method) : ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో క్రింది క్రమంలో గణన చేయవలె.

(1) తరగతుల మధ్య విలువలను కనుగొనవలె (x)

(2) మధ్య విలువలను వాటి పౌనఃపున్యంతో హెచ్చించవలె. (xf)

(3) హెచ్చించగా వచ్చిన లబ్ధాలను కూడవలె (Σxf)

(4) లబ్ధాల మొత్తాన్ని పౌనఃపున్యపు మొత్తంతో (N) భాగించగా వచ్చిన ఫలితము అంకమధ్యమం అంటారు.

అనగా, $a = \frac{\Sigma xf}{N}$; a = అంకమధ్యమం;

Σxf = తరగతుల మధ్య విలువలను వాటి పౌనఃపున్యంతో హెచ్చింపగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తం.

N = పౌనఃపున్యాల మొత్తం.

ఉదాహరణ 9 : ఒక కళాశాల తరగతిలోని 100 మంది విద్యార్థుల మార్కులు క్రింది విధంగా ఉన్నాయి. అంకమధ్యమం కనుగొనండి.

మార్కులు :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
విద్యార్థుల సంఖ్య:	3	7	9	12	13	16	15	14	8	3

జవాబు :

మార్కులు x	విద్యార్థులు f	తరగతుల x	మధ్యవిలువలు	xf
0-10	3	5	15	(3×5)
10-20	7	15	105	(7×15)
20-30	9	25	225	(9×25)
30-40	12	35	420	(12×35)
40-50	13	4	585	(13×45)
50-60	16	55	880	(16×55)
60-70	15	65	97	(15×65)
70-80	14	75	1050	(14×75)
80-90	8	85	680	(8×85)
90-100	3	95	285	(9×95)
	N = 100		Σxf : 5220	

$a = \frac{\Sigma xf}{N}$

$\therefore a = \frac{5220}{100}$

= 55.2 మార్కులు

దగ్గర పద్ధతి : **(Short cut method)**

దగ్గర పద్ధతిలో అంకమధ్యమం కనుగొనడానికి క్రింది విధానము అనుసరించవలె.

1) తరగతుల మధ్య విలువలు కనుగొనవలె. (M.V.)

2) మధ్య విలువల నుండి ఊహించిన సగటును తీసుకొనవలె. (x)

3) ఊహించిన సగటు నుండి ఇతర మధ్య విలువలకు విచలనాలు (తేడాలు) కనుగొనవలె. (dx)

4) విచలనాలను (dx) వాటి పౌనఃపున్యం f హెచ్చించవలె. (fdx)

5) హెచ్చించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తమును (Σfdx) పౌనఃపున్యపు మొత్తం చేత (N) భాగించి, వచ్చిన ఫలితాన్ని ఊహించిన సగటుకు (X) కలుపవలె. అదే అంకమధ్యమం అవుతుంది. అనగా

$a = x + \frac{\Sigma fdx}{N}$ a = అంకమధ్యమం; x = ఊహించిన సగటు

Σfdx = ఊహించిన సగటు తీసిన విచలనాలను వాటి పౌనఃపున్యంతో హెచ్చించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తము.

N = పౌనఃపున్యము మొత్తము

ఉదాహరణ 10 :- ఉదాహరణ 9 లోని శ్రేణికి దగ్గర పద్ధతిలో అంకమధ్యమం గుణించండి.

జవాబు :-

x	f	mv	dx	fdx
0-10	3	5	-50	-150
10-20	7	15	-40	-280
20-30	9	25	-30	-270
30-40	12	35	-20	-240
40-50	13	45	-10	-130
50-60	16	× 55	0	0
60-70	15	65	+10	150
70-80	14	75	+20	280
80-90	8	85	+30	240
90-100	3	95	+40	120
	N = 100			790
				-1070
				$\Sigma fdx = -280$

X = ఊహించిన సగటు = 55

$$a = x + \frac{Efdx}{N}$$

$$= 55 - \frac{280}{100}$$

= 55 - 2.8

= 52.2 మార్కులు

ఇది సోపాన విచలనాల పద్ధతిలో కూడా చేయవచ్చును.

ఉదాహరణ 12 : క్రింది దత్తాంశము నుండి అంకమధ్యమం కనుగొనండి.

వేతనాలు రూ. లలో	12.5-17.5	17.5-22.5	22.5-27.5	27.5-32.5	32.5-37.5	37.5-42.5	42.5-47.5	47.5-52.5	52.5-57.5
కార్మికులసంఖ్య	2	22	10	14	3	4	6	1	1

మొత్తం కార్మికుల సంఖ్య = 63

జవాబు :-

x	f	mv	dx	fdx
12.5 - 17.5	2	15	-3	-6
17.5 - 22.5	22	20	-2	-44
22.5 - 27.5	10	25	-1	-10
27.5 - 32.5	14	x 30	0	0
32.5 - 37.5	3	35	+1	+3
37.5 - 42.5	4	40	+2	+8
42.5 - 47.5	6	45	+3	+18
47.5 - 52.5	1	50	+4	+4
52.5 - 57.5	1	55	+5	+5
	N = 63			+38
				-60
				$\Sigma fdx = -22$

X = ఊహించిన సగటు + 30

i = తరగతి అంతరం = 5

$$a = x + \frac{\Sigma fdx}{N} \times i = 30 + \frac{-22}{63} \times 5$$

$$= 30 - \frac{110}{63} = 30 - 1.75$$

= 28.25

∴ సగటు వేతనం = రూ. 28.25

ఉదాహరణ 13 : రష్యాలోని ఒక పట్టణంలో ఒక సంవత్సరమునందు ప్రతిరోజు రికార్డు చేసిన ఉష్ణోగ్రతలు ఈ దిగువ ఇవ్వబడినవి.

ఉష్ణోగ్రత C^0	-40 నుండి -30	-30 నుండి -20	-20 నుండి -10	-10 నుండి 0	0 నుండి 10	10 నుండి 20	20 నుండి 30
రోజులసంఖ్య	10	28	30	42	65	180	10

మొత్తం రోజుల సంఖ్య = 365

అంకమధ్యమం కనుగొనండి.

జవాబు :-

x	f	mv	dx	fdx
-40 నుండి -30	10	-35	-4	-40
-30 నుండి -20	28	-25	-3	-84
-20 నుండి -10	30	-15	-2	-60
-10 నుండి 0	42	-5	-1	-42
0 నుండి 10	65	+5	-0	0
10 నుండి 20	180	+15	+1	180
20 నుండి 30	10	+25	+2	20
	N = 365			+200
				- 226
				-26

ఊహించిన సగటు = x = +5

తరగతి అంతరం i = 10

$$a = x + \frac{\Sigma fdx}{N} xi$$

$$5 + \frac{-26}{365} x 10 = 5 - \frac{260}{365}$$

$$= 5 - 0.71 = 4.29$$

అంకమధ్యమం = 4.29 సెంటిగ్రేడ్ డిగ్రీలు

వివృత అవధుల తరగతులు - అంకమధ్యమం లెక్కించుట: (Open and Classes - Calculation of Arithmetic mean)

వివృత అవధులుగల తరగతులలో (Open and classes) మొదటి తరగతి యొక్క దిగువ అవధి (Lower limit) చివరి తరగతి యొక్క ఎగువ అవధి (Upper limit) తెలియవు. అవధులు పూర్తిగా తెలియనిదే తరగతుల మధ్య విలువలు కనుగొనలేము. మధ్య విలువలు లేనిదే అంకమధ్యమం లెక్కించుట సాధ్యంకాదు. తెలియని తరగతి అవధులను కనుగొనటానికి ఇతర తరగతుల యొక్క తరగతి అంతరాల ధోరణిని గమనించి, అన్ని తరగతుల అంతరాలవలెనే ఉంటాయని అనుకొని గణన చేయవలె.

ఉదాహరణకు 40 కంటే తక్కువ

40 - 50

50 - 60

60 - 70

70 - 80

80 - 90

90 - 100

100 -110

110 - కంటే ఎక్కువ

ఈ దత్తంశములో అన్ని తరగతుల అంతరము 10 గా ఉన్నది. అందుచేత మొదటి మరియు చివరి తరగతుల అంతరము కూడా 10 అని అనుకొనవలె. మొదటి తరగతి దిగువ అవధి విలువ 30 గాను, చివరి తరగతి ఎగువ అవధి విలువ 120 గాను ఊహించవలె.

అన్ని తరగతులలో అంతరాలు సమానంగా లేనప్పుడు (Unequal class Interva... తరగతి అంతరాన్ని నిర్ణయించడానికి దాని తరువాతి (following) తరగతి యొక్క అంతరాన్ని ఆధారంగా తీసుకొనవలె. ... ంతరాన్ని నిర్ణయించడానికి, దానికి ముందున్న (Preceeding) తరగతి యొక్క అంతరాన్ని ఆధారముగా తీసుకొనవలె. ఉదాహర...

40 కంటే తక్కువ

40 - 45

45 - 50

50 - 60

60 - 75

75 - 90

90 - 100

100 - 120

120 - ఆపైన

అన్ని తరగతుల అంతరాలు సమానముగా లేవు. తరగతి అంతరము కొన్నింటిలో 5, కొన్నింటిలో 15, మరి కొన్నింటిలో 20 గా ఉంది. మొదటి తరగతి అంతరాన్ని నిర్ణయించడానికి దాని తరువాత తరగతి యొక్క అంతరాన్ని ఆధారంగా తీసుకొనవలె. అనగా రెండవ తరగతి యొక్క అంతరము 5 (40 నుండి 45). కాబట్టి మొదటి తరగతి యొక్క అంతరము కూడా 5గా అనుకోవలె. అనగా మొదటి తరగతి 35-40 గా ఉంటుంది. చివరి తరగతికి ఆధారము - అంతకు ముందున్న (Preceeding) తరగతి యొక్క అంతరము. అంతకుముందున్న తరగతి 100 - 120. దాని అంతరము 20. కాబట్టి చివరి తరగతి అంతరము కూడా 20గా ఊహించుకొనవలె. అనగా చివరి తరగతి 120 - 140 గా ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 14 : క్రింది దత్తాంశము నుండి అంకమధ్యమం కనుగొనండి.

ఆదాయం రూపాయలలో	వ్యక్తుల సంఖ్య
(Below) 40 కి. లోపు	6
40 - 45	7
45 -50	13
50 - 60	15
60 - 75	16
75 - 90	14
90 - 100	11
100 - 120	9
120 ఆ పైన(and Above)	9
	100

జవాబు :

అన్ని తరగతులలో అంతరాలు సమానముగా లేవు. రెండవ తరగతి 40 - 45 యొక్క అంతరము 5 కాబట్టి మొదటి తరగతి యొక్క అంతరము కుడా 5 గానే ఉంటుంది. అనగా మొదటి తరగతి 35 - 40.

చివరి తరగతికి ముందున్న తరగతి 100 - 120 యొక్క అంతరము 20 కాబట్టి చివరి తరగతి యొక్క అంతరము కూడా 20 గా ఉంటుంది. కాబట్టి చివరి తరగతి 120 - 140

x	f	mv	dx	fdx
35-40	6	37.5	-17.5	-105.0
40-45	7	42.5	-12.5	-87.5
45-50	13	47.5	-7.5	-97.5

ఊహించిన సగటు = X = 55

Σfdx

50-60	15	55.0	0	0
60-75	16	67.5	+12.5	200.0
75-90	14	82.5	+27.5	385.0
90-100	11	95.0	+40.5	440.0
100-120	9	110.0	+55.0	495.0
120-140	9	130.00	+75.0	675.0
	100			+ 2195.0
				- 290.0
				$\Sigma fdx = 1905.0$

$= 55 + \frac{1905}{100}$

$= 55 + 19.05$

$= 74.05$

సగటు ఆదాయం = రూ. 74.05

అసమగ్ర రుపాలు - అంకమధ్యమము **(INCLUSIVE SERIES - ARITHMETIC MEAN)**

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో మొదటి తరగతి యొక్క ఎగువ అవధికి (Upper limit) దాని తరువాత తరగతి యొక్క దిగువ అవధికి (Lower limit) వ్యత్యాసం కనపడుతుంటే వాటిని అసమగ్ర శ్రేణులు (Inclusive series) అంటారు. మొదటి తరగతి ఎగువ అవధికి, దాని తరువాత తరగతి దిగువ అవధికి తేడా ఏమీ లేకపోతే, అనగా మొదటి తరగతి ఎక్కడ అంతమయిందో దాని తరువాత తరగతి అక్కడే మొదలయితే - అలాంటి శ్రేణులను సమగ్రమైన శ్రేణులు (Exclusive series) అంటారు. ఉదాహరణ పరిశీలించండి.

Exclusive Series	Inclusive Series
0-10	0-9
10-20	10-19
20-30	20-29
30-40	30-39
40-50	40-49
50-60	50-59
60-70	60-69
70-80	70-79
80-90	80-89
90-100	90-99

అంక మధ్యమం కనుగొనడానికి కావలసిన తరగతి మధ్య విలువ

కనుక అసమగ్రరూపాల నుండే మధ్యవిలువలు కనుగొని అంకమధ్యమం కనుగొంటారు. అయితే తరువాయి పాఠాలలో రాబోయే మధ్యగతం, బాహుళకం మొదలైన సగటులు కనుగోనటానికి శ్రేణి సమగ్ర రూపంలో ఉండాల్సిన అవసరం ఉంది. ఇచ్చిన అసమగ్ర శ్రేణిని, సమగ్ర శ్రేణిగా మార్చే పద్ధతిని ఆపాఠాలలో చర్చిద్దాం.

ఉదాహరణ 16 : దిగువ విభాజనం నుండి అంకమధ్యమం లెక్కించండి.

తరగతి :	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59
పౌనఃపున్యము :	3	5	10	20	12	6	3	1

జవాబు :

x	f	mv	dx	fdx
20-24	3	22	-3	-9
25-29	5	27	-2	-10
30-34	10	32	-1	-10
35-39	20	x = 37	0	0
40-44	12	42	+1	12
45-49	6	47	+2	12
50-54	3	52	+3	9
55-59	1	57	+4	4
	N = 60			+ 37
				-29
				Σfdx = +8

ఊహించిన సగటు = x = 37

తరగతి అంతరం i = 5

$$a = x + \frac{\Sigma\, fdx}{N} \times i = 37 + \frac{8}{60} X\, 5$$

$$= 37 + \frac{40}{60} = 37 + 0.67 = 37.67$$

అంకమధ్యమం = 37.67

సంచిత పౌనఃపున్యదత్తాంశము : (Cumulative Frequency Distribution)

"కంటే తక్కువ" శ్రేణులు ("Less than" Series)

"కంటే ఎక్కువ" శ్రేణులు ("More than" Series)

"కంటే తక్కువ" లేదా "కంటే ఎక్కువ" అనే శ్రేణులలో దత్తాంశము ఇవ్వబడుతుంది. ఇటువంటి సంచిత శ్రేణులను (Cumulative Series) సాధారణ పౌనఃపున్యము వచ్చేవిధంగా పునర్మించుకొని అంకమధ్యమం కనుగొనవలె.

ఉదాహరణ 17 : గ్రామీణ ప్రాంతంలో ఒక బ్యాంకు యొక్క చిన్న బ్రాంచీలో ఒక నెలలో ఉన్న సేవింగ్స్ ఖాతా నిల్వలు సగటున ఎంత ఉన్నదీ ఈ దిగువ ఇచ్చినారు. వాటి అంకమధ్యమాన్ని కనుగొనండి.

ఖాతా నిల్వలు	ఖాతాల సంఖ్య
రూ. 1,000 కంటే తక్కువ	500
రూ. 900 కంటే తక్కువ	498
రూ. 800 కంటే తక్కువ	480
రూ. 700 కంటే తక్కువ	475
రూ. 600 కంటే తక్కువ	440
రూ. 500 కంటే తక్కువ	374
రూ. 400 కంటే తక్కువ	300
రూ. 300 కంటే తక్కువ	180
రూ. 200 కంటే తక్కువ	100
రూ. 100 కంటే తక్కువ	50

సాధు :

సంచిత పౌనఃపున్య శ్రేణులు ఇవ్వబడినాయి. వాటిని సాధారణ పౌనఃపున్య శ్రేణులుగా మార్చుకొనవలె. రూ. 100 కంటే తక్కువ ఖాతాలు 50 అనగా 0 నుండి 100 వరకు 50 అని అర్థం. అదే విధంగా రూ. 200 కంటే తక్కువ మొత్తం ఖాతాలు 100 అనగా 100 నుండి 200 వరకు 50 అని అర్థం (100-50). క్రింది విధముగా సాధారణ శ్రేణులుగా మార్చవలె.

x	f		m	dx	fdx
0-100	50	(50-0)	50	-4	-200
100-200	50	(100-50)	150	-3	-150
200-300	80	(180-100)	250	-2	-160
300-400	120	(300-180)	350	-1	-120
400-500	74	(374-300)	450	0	0
500-600	66	(440-374)	550	+1	66
600-700	35	(475-440)	650	+2	70
700-800	5	(480-475)	750	+3	15
800-900	18	(498-480)	850	+4	72
900-1000	2	(500-498)	950	+5	10
	N = 500				+233
					Σfdx = -630
					= -397

ఊహించిన సగటు x = 450

Σfdx= -397

తరగతి అంతరము i = 100

N = 500

$$a = x + \frac{\Sigma fdx}{N} X\ i$$

$$= 450 + \frac{-397}{500} X\ 100$$

= 450 - 79.4 = 370.6

ఉదాహరణ 18 : దిగువ పట్టీ నుండి అంకమధ్యమం కనుగొనండి.

హాజరుకాని రోజులు	విద్యార్థులసంఖ్య
5 కంటే తక్కువ	29
10 కంటే తక్కువ	224
15 కంటే తక్కువ	465
20 కంటే తక్కువ	582
25 కంటే తక్కువ	634
30 కంటే తక్కువ	644
35 కంటే తక్కువ	650
40 కంటే తక్కువ	653
45 కంటే తక్కువ	655

జవాబు :-

x	f		mv	dx	fdx
0- 5	29	(29-0)	2.5	-3	-87
5-10	195	(224-29)	7.5	-2	-390
10-15	241	(465-224)	12.5	-1	-241
15-20	117	(582-465)	17.5	0	0
20-25	52	(634-582)	22.5	+1	52
25-30	10	(644-634)	27.5	+2	20
30-35	6	(650-644)	32.5	+3	18
35-40	3	(653-650)	37.5	+4	12
40-45	2	655-653)	42.5	+5	10
N = 655				-718	
				+112	
				-606	

ఊహించిన సగటు x = 17.5

తరగతి అంతరం i = 5

$$a = x + \frac{\Sigma fdx}{N} X\ i$$

$$a = 17.5 + \frac{606}{655} X\ 5$$

= 12.87

ఉదాహరణ 19 :- క్రింది దత్తాంశము నుండి అంకమధ్యమం లెక్కించండి.

ఆదాయము	వ్యక్తుల సంఖ్య
10 కంటే ఎక్కువ	72
20 కంటే ఎక్కువ	67
30 కంటే ఎక్కువ	59
40 కంటే ఎక్కువ	50
50 కంటే ఎక్కువ	36
60 కంటే ఎక్కువ	21
70 కంటే ఎక్కువ	9
80 కంటే ఎక్కువ	3

జవాబు :-

x	f		mv	dx	fdx
10-20	5	(72-67)	15	-3	-15
20-30	8	(67-59)	25	-2	-16
30-40	9	(59-50)	35	-1	-9
40-50	14	(50-36)	x = 45	0	0
50-60	15	(36-21)	55	+1	15
60-70	12	(21-9)	65	+2	24
70-80	6	(9-3)	75	+3	18
80-90	3	(3-0)	85	+4	12
	N = 72				+ 69
					-40
					$\Sigma fdx = 29$

ఊహించిన సగటు x = 45

తరగతి అంతరం i = 10

$\Sigma fdx = 29$; N = 72

$$a = x + \frac{\Sigma fdx}{N} \times i$$

$$= 45 + \frac{29}{72} \times 10$$

$$= 45 + 4.03 = 49.03$$

సగటు ఆదాయము = రూ. 49.03

ఉదాహరణ 20 :- దిగువ దత్తాంశము నుండి అంకమధ్యమము కనుగొనుము.

మార్కులు	విద్యార్థులు
0 కంటే ఎక్కువ	2400
10 కంటే ఎక్కువ	2367
20 కంటే ఎక్కువ	2314
30 కంటే ఎక్కువ	2206
40 కంటే ఎక్కువ	1985
50 కంటే ఎక్కువ	1832
60 కంటే ఎక్కువ	1510
70 కంటే ఎక్కువ	1071
80 కంటే ఎక్కువ	545
90 కంటే ఎక్కువ	50

జవాబు :

x	f	mv	dx	fdx
0-10	33	5	-5	-165
10-20	53	15	-4	-212
20-30	108	25	-3	-324
30-40	221	35	-2	-442
40-50	153	45	-1	-153
50-60	322	55	0	0
60-70	439	65	+1	439
70-80	526	75	+2	1052
80-90	495	85	+3	1485
90-100	50	95	+4	200
	N = 2400			+ 3176
				-1296
				Σfdx = +1880

ఊహించిన సగటు X = 55

$\Sigma fdx = 1880$ N = 2400

తరగతి అంతరము i = 10

$$a = x + \frac{\Sigma fdx}{N} X\ i = 55 + \frac{1880}{2400} X 10$$

= 55 + 7.83 = 62.83

మధ్యవిలువలు - అంకమధ్యమము : తరగతులు ఇవ్వడానికి బదులుగా, ఒక్కొక్కప్పుడు ఆ తరగతుల మధ్య విలువలే ఇవ్వబడతాయి. కనుక ఇచ్చిన శ్రేణిని మార్పుచేయకుండా అంకమధ్యమం గణించవలె.

<u>ఉదాహరణ : 22</u> ఒక ఫ్యాక్టరీలో పనిచేయు కార్మికుల వేతనాల తరగతిలోని మధ్యవిలువలు వారి సంఖ్య ఇవ్వబడినాయి. సగటు వేతనం కనుగొనండి.

వేతనం తరగతి మధ్య విలువ	కార్మికుల సంఖ్య
5	7
10	8
15	12
20	13
25	18
30	14
35	11
40	8
45	5
50	4

అంకమధ్యమం గణన :

mv	f	dx	fdx
5	7	-4	-28
10	8	-3	-24
15	12	-2	-24
20	13	-1	-13
25	18	0	0
30	14	+1	14
35	11	+2	22
40	8	+3	24
45	5	+4	20
50	4	+5	20
	N = 100		+ 100
			-89
			Σfdx = 11

ఊహించిన సగటు X = 25

$\Sigma fdx = 11$ N = 100

తరగతి అంతరం i = 5

$$a = x + \frac{\Sigma fdx}{N} X\ i = 25 + \frac{11}{100} X 5 = 25 + 0.55$$

= 25. 55

సగటు వేతనం = రూ. 2.55

5.8 భారిత అంకమధ్యమము (WEIGHTED ARITHMETIC MEAN)

అంకమధ్యమం లెక్కించడంలో దత్తాంశములోని విలువలు అన్నింటికి సమాన ప్రాముఖ్యం ఇవ్వబడుతుంది. కొన్ని సందర్భాలలో అన్ని విలువలకు సమాన ప్రాముఖ్యం ఉండదు. వ్యక్తిగతంగా విలువలకు లేదా అంశాలకు వేరు వేరు ప్రాముఖ్యాలుండవచ్చును విలువ సాపేక్షిక ప్రాముఖ్యాన్ని (Relative importance) అలక్ష్యం చేస్తే సగటులోని యదార్థత కనపడదు. ఉదాహరణకు ఒక వర్గపు ప్రజల జీవన వ్యయసూచిక తయారు చేసేటప్పుడు వారు ఉపయోగించే వినియోగవస్తువులు ధరల సామాన్య సగటు లెక్కిస్తే సరిపోదు. అలాంటి సగటు దత్తాంశానికి ప్రాతినిధ్యం వహించదు. ఇంటి అద్దె రెండు రెట్లు పెరగవచ్చు. బియ్యం ధర 3 రెట్లు పెరగవచ్చు. ఈ పెరుగుదల జీవన వ్యయంపై చాలా ఎక్కువ ప్రభావాన్ని చూపుతుంది. అయితే నిత్యం అవసరమైన ఉప్పుధర 5 రెట్లు పెరిగినప్పటికి జీవనవ్యయం పై పెద్ద ప్రభావం కనిపించదు. అందుచేత వివిధ వస్తువుల సాపేక్షిక ప్రాముఖ్యాన్ని సగటును గణించడంలో ఉపయోగించవలసిన అవసరం ఉంటుంది. వస్తువుయొక్క సాపేక్షిక ప్రాముఖ్యతను తెలిపే సంఖ్యాయోగాన్ని ఆ వస్తువు తాలూకు భారం అంటాం. అంశాల సాపేక్షిక ప్రాముఖ్యం ఆధారంగా అంశాలకు భారాలను ఇచ్చి, కనుగొనే సగటును భారిత అంకమధ్యమం (Weighted arithmetic mean) అంటారు.

చలనాలను లేదా అంశాలను లేదా విలువలను వాటి భారాలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తమును, భారాల మొత్తంతో భాగించగా వచ్చిన ఫలితాన్ని భారిత అంకమధ్యమంగా గణిస్తాం. అంశం x అని, దానిభారం w అని సూచిస్తే.

భారిత అంకమధ్యమమం $aw = \frac{\Sigma xw}{\Sigma w}$ Σxw = చలనాలను వాటి భారాలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తము.

w = భారాల మొత్తము

ఉదాహరణ 22 :- క్రింది దత్తాంశము నుండి భారిత అంకమధ్యమం, సాధారణ అంకమధ్యమం కనుగొనండి.

విలువలు Variables	80	75	67	86	35
భారాలు Weights	2	3	4	5	6

జవాబు:

S.No	x	w	xw
1	80	2	160
2	75	3	225
3	67	4	268
4	86	5	430
5	35	6	210
	$\Sigma = 343$	20	$\Sigma xw = 1293$

అంకమధ్యమం = $a = \frac{\Sigma x}{N} = a = \frac{343}{5} = 68.6$

భారిత అంకమధ్యమం = $aw = \frac{\Sigma xw}{\Sigma w} = \frac{1293}{20} = 64.65$

ఉదాహరణ 23 :- దిగువ పట్టిలో మూడు విశ్వవిద్యాలయాల పరీక్షా ఫలితాలు పొందుపరచడమైనది. ఏ విశ్వవిద్యాలయం మెరుగుగా ఉన్నదో సరిపోల్చి చూపండి.

	A		B		C	
విశ్వవిద్యాలయ	విద్యార్థుల సంఖ్య		విద్యార్థుల సంఖ్య		విద్యార్థుల సంఖ్య	
పరీక్షలు	కృతార్థుల శాతం	వందలలో	కృతార్థుల శాతం	వందలలో	కృతార్థుల శాతం	వందలలో
M.A	70	5	75	4	75	6
M.Sc.	85	4	80	3	65	4
M.Com	80	6	65	5	70	5
B.A	75	7	85	6	80	7
B.Sc	65	5	75	4	85	5
B.Com	75	8	70	5	75	5

జవాబు : సాధారణ మరియు భారిత అంకమధ్యమం లెక్కించుట.

విశ్వవిద్యాలయ పరీక్షలు	A ఫలితాల సంఖ్య x	విద్యార్థుల సంఖ్య వందలలో w	శాతం xw	B ఫలితాల సంఖ్య x	విద్యార్థుల సంఖ్య వందలలో w	శాతం xw	C ఫలితాల సంఖ్య x	విద్యార్థుల సంఖ్య వందలలో w	శాతం xw
M.A	70	5	350	75	4	300	75	6	450
M.Sc	85	4	340	80	3	240	65	4	260
M.Com	80	6	480	65	5	325	70	5	350
B.A	75	7	525	85	6	510	80	7	560
B.Sc	65	5	325	75	4	300	85	5	425
B.Com	75	8	600	70	5	350	75	5	375
N = 6	450	35	2620	450	27	2025	450	32	2420

సాధరణ అంక మధ్యమము $a = \frac{\Sigma x}{N}$

$\therefore$ విశ్వవిద్యాలయం $A = \frac{450}{6} = 75\%$ $\therefore$ విశ్వవిద్యాలయం $B = \frac{450}{6} = 75\%$

$\therefore$ విశ్వవిద్యాలయం $C = \frac{450}{6} = 75\%$ $\therefore$ భారిత అంకమధ్యమం $= aw = \frac{\Sigma xw}{\Sigma w}$

విశ్వవిద్యాలయం $A = \frac{2620}{35} = 74.86\%$ విశ్వవిద్యాలయం $B = \frac{2025}{27} = 75.00\%$

విశ్వవిద్యాలయం $C = \frac{2420}{32} = 75.64\%$

విశ్వవిద్యాలయం 'C' లో కృతార్థులైన వారి శాతం ఎక్కువ. (భారిత అంకమధ్యమం ద్వారా) విశ్వవిద్యాలయం 'C' పరిస్థితి మెరుగుగా ఉందని చెప్పవచ్చును. మూడు విశ్వవిద్యాలయములలో సాధారణ అంకమధ్యమం మాత్రం ఒకటే.

ఉదాహరణ 24 : దిగువ దత్తాంశము నుండి సాధారణ మరియు భారిత అంకమధ్యమములు లెక్కించండి.

ఉద్యోగ పదవి	నెలసరి జీతం రూ॥లో	ఉద్యోగుల సంఖ్య
1 తరగతి ఆఫీసర్లు	1500	10
11 తరగతి ఆఫీసర్లు	800	20
సబార్డినేట్ సిబ్బంది	500	70
గుమస్తాలు	250	100
సహాయకారులు	100	150

జవాబు :

ఉద్యోగ పదవి	x జీతం రూ.	w ఉద్యోగు సంఖ్య	xw
1 ఆఫీసర్లు	1500	10	15,000
11 ఆఫీసర్లు	800	20	16,000
సబార్డినేట్స్	500	70	35,000
గుమాస్తాలు	250	100	25,000
సహాయకారులు	100	150	15,000
N = 5	Σx = 3150	Σw = 350	Σxw = 1,06,000

సాధారణ అంకమధ్యమం = $a = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{3150}{5} = 360$ రూ॥

భారత అంకమధ్యమం = $a = \frac{\Sigma xw}{\Sigma w} = \frac{106000}{350} = 302.86$

5.9 అంక మధ్యమము - ప్రయోజనాలు (Merits)

1. అంకమధ్యమమును సులభముగా అర్థము చేసుకొనవచ్చును. మరియు సులభముగా లెక్కించవచ్చును. సామాన్యులకు "సగటు" అనిన అంకమధ్యమము అని అర్థమవుతుంది.
2. సగటు దత్తాంశములోని అన్ని అంశాలపై ప్రభావితమవుతుంది. ఇది దీనికున్న ఆదర్శ లక్షణము. ఏ ఒక్క అంశము తెలియక పోయినా అంకమధ్యమము లెక్కించడము అసాధ్యము.
3. ఇది స్పష్టంగాను, ఖచ్చితముగాను నిర్వచించబడిన సగటు. కారణమేమిటంటే పరిశోధకుడు పక్షపాత బుద్ధితో లెక్కించిననూ, నిష్పక్షపాత బుద్ధితో లెక్కించిననూ వచ్చే విలువ ఒక్కటే.
4. ఇది బీజీయ ప్రస్తావనకు పనికి వస్తుంది. ఎందుకనగా వివరాలన్నింటినీ పరిగణనలోనికి తీసుకొని లెక్కించబడుతుంది.
5. ప్రతిచయన మార్పులకు అంతగా ప్రభావితము కాదు.
6. సగటు విలువ, విలువలన్నింటిలో మధ్యస్తంగా వుంటుంది. రెండు వైపులా దీని విలువ సమతౌల్యతను సాధిస్తుంది.
7. అంకమధ్యమము స్థాన నిర్ధము విలువ కాదు మరియు ఇతర మానాలవలె దిక్సూచి విలువకాదు. ఇది పూర్తిగా గణన చేయబడిన లేక లెక్కించబడిన విలువ.

లోపాలు :

1. అత్యల్ప మరియు అత్యధిక అంశాల వల్ల అంకమధ్యము బాగా ప్రభావితము అవుతుంది. ఉదాహరణకు నలుగురి విద్యార్థుల మార్కులు క్రమంగా 70, 55, 30, మరియు 85. సగటు మార్కులు $70 + 55 + 30 + 85 = \frac{240}{4} = 60$ సగటు మార్కులు "60" ఏ ఒక్క విలువకు ప్రాతినిధ్యము వహించలేదు. కావున ఇటువంటి సగటు తప్పుదారి పట్టించేదిగా వుంటుంది.
2. వివృతాంతరాలలో మొదటి మరియు చివరి తరగతి అంతరాల విలువలను తరగతి అంతరాల తీరును బట్టి ప్రమేయ పూర్వకంగా మొదటి తరగతి దిగువ అవధి మరియు చివరి తరగతి ఎగువ అవధి విలువలను నిర్ణయించి అంకమధ్యమము గణన చేయవలసి వుంటుంది. కావున ఇది వాస్తవికతకు దూరము. కావున అంకమధ్యమము సార్థకదోషము (Substantial error) నకు గురి అవుతుంది.
3. సాధారణ విభాజనములలో (In the case of normal distributions) చలనాలు "μ" అకార విభాజనాన్ని, కలిగి వుంటాయి, ఈ విభాజనాలలో అంకమధ్యమము ఉపయుక్తంగా వుండదు.
4. గుణాత్మక దత్తాంశము (Qualitative data) లలో గుణాత్మక విశ్లేషణలో అంటే, నిజాయితీ, ప్రజ్ఞా, అందము మొ॥ వాటి విశ్లేషణలో అంకమధ్యమము పనికి రాదు. వీటి విశ్లేషణలో మధ్యగతాన్ని (Median) మాత్రమే ఉపయోగిస్తారు.
5. విభాజనములో అన్ని అంశాలు వున్నట్లు అయితే సగటు లెక్కింపు సాధ్యము. ఏ ఒక్క అంశపు విలువ లేకున్నా అంకమధ్య గణన సాధ్యపడదు. మధ్యగతానికి, బాహుళకానికి, ఈ సమస్య వుండదు.
6. అంకమధ్యమము ఒక్కొక్క అసహజ (Absurd) ఫలితాలనిస్తుంది.

3) పౌనఃపున్యాలను సంచిత పౌనఃపున్యం లెక్కించవలెను. (cumulative frequency)

4) మొత్తం పౌనఃపున్యం N అయితే $\frac{N+1}{2}$ వ అంశాన్ని సంచిత పౌనఃపున్యం cf లో గుర్తించి దాని కెదురుగా ఉన్న చలనాన్ని అనగా ను మధ్యగతంగా తీసుకొనవలెను.

ఉదాహరణ 3 : ఒక తరగతిలోని 100 మంది విద్యార్థుల ఎత్తు సెంటీ మీటర్లలో క్రింది విధంగా ఉంది. మధ్యగతం కనుగొనండి.

ఎత్తు సెంటీ మీటర్లలో :	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164
విద్యార్థుల సంఖ్య :	3	7	9	12	13	17	16	14	7	2

జవాబు :-

ఎత్తు	విద్యార్థుల సంఖ్య	సంచితపౌనఃపున్యం
X	F	Y
155	3	3
156	7	10
157	9	19
158	12	31
159	13	44
160	17	61
161	16	77
162	14	91
163	7	98
164	2	100
	N = 100	

మధ్యగత స్థానం = $\frac{N+1}{2}$ వ అంశం

N = మొత్తం పౌనఃపున్యం = 100

$\frac{100+1}{2}$ వ అంశం = $\frac{101}{2}$ వ అంశం

= 50.5 వ అంశం

50. 5 వ అంశం. 61 అనే cf లో ఉన్నది కాబట్టి దానికెదురుగా ఉన్నచలనం (x) 160 మధ్యగతం అవుతుంది.

∴ మధ్యగతపు ఎత్తు = 160 సెంటీ మీటర్లు.

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు :

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో తరగతులు మరియు పౌనఃపున్యం ఇవ్వబడతాయి. తరగతులు ఇవ్వడం వలన వ్యక్తిగత (అంశాలు) ఉండవు. వ్యక్తిగత విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో మధ్యగతపు స్థానం కనుగొనడానికి $\frac{N+1}{2}$ వ అంశం అనే సూత్రాన్ని ప్రయోగించవలెను. అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో మొత్తం అంశాలలో 50 శాతం అంశాలను కనుగొనడానికి $\frac{N}{2}$ అని లెక్కించవలెను.

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో మధ్యగతం లెక్కించడానికి క్రింది పద్ధతిని అనుసరించవలెను.

1. పౌనఃపున్యాన్ని సంచితం చేయవలెను. (cf)
2. $\frac{N}{2}$ వ అంశం లెక్కించి, దానిని cf లో గుర్తించవలె. ఆ cf కు ఎదురుగా ఉన్న తరగతిని మధ్యగతపు తరగతి అంటారు. (Median Class) అనగా అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో $\frac{N}{2}$ వ అంశం అని లెక్కించగా వచ్చేది మధ్యగతం విలువ కాదు. మధ్యగతపు తరగతి మాత్రమే. అంటే మధ్యగతం ఏ తరగతిలో ఉందో తెలుపుతుంది.

3. మధ్యగతపు తరగతి ఆధారముగా మధ్యగతం కనుగొనడానికి క్రింది సూత్రాన్ని ప్రయోగించవలెను. $M = l + \frac{C \times i}{f}$

M = మధ్యగతం

l = మధ్యగతపు తరగతి యొక్క దిగువ అవధి (Lower limit of the Median Class)

C = మధ్యగతపు స్థానానికి $\frac{N}{2}$ గడచిన తరగతి యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యానికి తేడా (Diference between the median position and the cumulative frequency of the preceeding class)

i = మధ్యగతపు తరగతి యొక్క అంతరం

f = మధ్యగతపు తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము.

ఉదాహరణ 4 : క్రింది దత్తాంశము నుండి మధ్యగతం విలువను కనుగొనండి.

మార్కులు :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
విద్యార్థుల సంఖ్య :	8	12	13	15	16	14	13	9

జవాబు :

మార్కులు x	విద్యార్థుల సంఖ్య f	సంచిత పౌనఃపున్యం cf
0-10	8	8
10-20	12	20
20-30	13	33
30-40	15	48
40-50	16	64
50-60	14	91
60-70	13	91
70-80	9	100
	N = 100	

ముందుగా పౌనఃపున్యాన్ని సంచితం చేయవలె $\frac{N}{2}$ వ అంశం లెక్కించి దానిని సంచిత పౌనఃపున్యంలో గుర్తించి, దాని కెదురుగా ఉన్న తరగతిని మధ్యగతపు తరగతిగా తీసుకొనవలె.

మధ్యగతపు స్థానం $\frac{N}{2}$ వ అంశం, N అనగా పౌనఃపున్యపు మొత్తం

మధ్యగతపు స్థానం $\frac{100}{2}$ వ అంశం = 50 వ అంశం 50 వ అంశం సంచిత పౌనఃపన్యం 64 లో ఉంది. దానికి ఎదురుగా ఉన్న తరగతి 40-50. అనగా మధ్యగతపు తరగతి 40-50 అవుతుంది. సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తే.

= మధ్యగతం $M = l + \frac{C \times i}{f}$

$L = 40; \quad C = (50 - 48) = 2; \quad i = 10; \quad f = 16$

$= 40 + \frac{2 \times 10}{16} \quad = 40 + 1.25$

∴ మధ్యగతం = 41.25 మార్కులు.

అసమగ్రశ్రేణులు : (INCLUSIVESERIES)

తరగతులు అసమగ్రరూపాలుగా (Inclusive) ఉన్నప్పుడు అనగా తరగతి యొక్క దిగువ అవధి మరియు ఎగువ అవధి అదే తరగతికి చెంది ఉన్నప్పుడు - తరగతులను సమగ్రరూపాలుగా (Exclusive Series) మార్చిన తరువాత మాత్రమే మధ్యగతం లెక్కించవలెను. Inclusive Series నుండి మధ్యగతం లెక్కించకూడదు. Exclusive Series గా మార్చిన తరువాత మాత్రమే మధ్యగతం గణనచేయవలెను. అసమగ్ర శ్రేణును సమగ్రరూపాలుగా మార్చడానికి ఈ క్రింది పద్ధతిని అనుసరించవలె.

మొదటి తరగతి యొక్క ఎగువ అవధికి రెండవ తరగతి యొక్క దిగువ అవధికి గల తేడాను 2 చే భాగించి వచ్చిన ఫలితాన్ని ప్రతి దిగువ అవధినుండి తీసివేయవలెను; ప్రతి ఎగువ అవధికి కూడవలెను. ఈ విధంగా చేస్తే Inclusive శ్రేణులు Exclusive శ్రేణులుగా మారిపోతాయి.

ఉదాహరణ 5 : క్రింది దత్తాంశం నుండి మధ్యగతం కనుగొనండి.

x =	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99
f =	7	12	13	18	17	14	9	8	2

సాధన :- అసమగ్ర రూపాలుగా (Inclusive) ఇవ్వబడిన శ్రేణులను సమగ్రరూపాలుగా (Exclusive) మార్చవలెను.

మొదటి తరగతి 10-19 ఇందులో ఎగువ అవధి 19

రెండవ తరగతి 20-29 ఇందులో దిగువ అవధి 20

మొదటి తరగతి ఎగువ అవధికి రెండవ తరగతి దిగువ అవధికి వ్యత్యాసం = 1(20-19) ఈ విధంగా ప్రతి తరగతి ఎగువ అవధికి దాని తరువాత దిగువ అవధికి గల తేడా 1. ఈ తేడా 1 లోను $\left(\frac{1}{2}\right)$ అనగా 0.5 ను ప్రతి దిగువ అవధి నుండి తీసివేయవలె. ప్రతి ఎగువ అవధికి కలుపవలెను. ఈ విధంగా చేయడం వలన అసమగ్ర రూపాలు (Inclusive Series) సమగ్ర రూపాలుగా (Exclusive Series) మారిపోతాయి.

వాస్తవమైన తరగతులు	పౌనఃపున్యం	సంచిత పౌనఃపున్యం
x	f	cf
9.5 - 19.5	7	7
19.5 - 29.5	12	19
29.5 - 39.5	13	32
39.5 - 49.5	18	50
49.5 - 59.5	17	67
59.5 -69.5	14	81
69.5 - 79.5	9	90
79.5 - 89.5	8	98
89.5 - 99.5	2	100
	N = 100	

మధ్యగతపు స్థానం = $\frac{N}{2}$ వ అంశం ;

N అనగా పౌనఃపున్యపు మొత్తం = 100

$= \frac{100}{2}$ వ అంశం ; 50 వ అంశం

50 వ అంశం సంచిత పౌనఃపున్యం (Cf) 50 లో ఉన్నది.

దాని కెదురుగా ఉన్న తరగతి 39.5 - 49.5

మధ్యగతపు తరగతి = 39.5 - 49.5

$$\text{మధ్యగతం} = l + \frac{C \times i}{f}$$

L = 39.5 : C = (50 - 32) = 18 : i = 10; f = 18

$$= 39.5 + \frac{18 \times 10}{18} = 39.5 + 10$$

మధ్యగతం = 49.5

గమనిక : 1) అసమగ్ర శ్రేణులను (Inclusive Series) అన్నింటినీ క్రమపడి సమగ్ర శ్రేణులుగా (Exclusive Series) మార్చవలసిన అవసరం లేదు. మధ్యగతపు తరగతి ఒక్కటి మాత్రం మార్చితే చాలును.

2) మధ్యగతం తప్పనిసరిగా మధ్యగతపు తరగతిలోనే ఉండవలెను. ఆ తరగతి దిగువ అవధి కంటే తగ్గకూడదు. ఎగువ అవధికి మించకూడదు.

మధ్య బిందువులు - మధ్యగతం (Mid - Values - Median)

మధ్యగతం కనుగొనడానికి తరగతులకు బదులుగా వాటి మధ్య విలువలు ఇవ్వబడతాయి. మధ్యగతం కనుగొనడానికి ముఖ్యమైన ఆధారం తరగతి యొక్క దిగువ అవధి. అందుచేత మధ్యవిలువలు ఇచ్చినప్పుడు వాటి నిజరూపాలైన తరగతులను తెలుసుకోవడానికి వెనుకకు వెళ్ళవలెను.

మధ్య విలువలను తరగతులుగా మార్చుకోవడానికి క్రింది పద్ధతిని అనుసరించవలె.

మధ్య విలువకు మధ్య విలువకు గల తేడాను కనుగొనవలెను. ఆ తేడాలో సగాన్ని ప్రతి మధ్య విలువనుండి తీసివేస్తే దిగువ అవధులు లభిస్తాయి. తేడాలో సగాన్ని ప్రతి మధ్య విలువకు కూడితే ఎగువ అవధులు లభిస్తాయి.

ఉదాహరణ 6 : మధ్యగతం కనుగొనండి.

తరగతుల మధ్యవిలువలు :	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115
పౌనఃపున్యము :	12	19	23	26	32	35	27	21	18	17

జవాబు : ప్రతి మధ్యవిలువకూ తేడా 10, ఇందులో సగాన్ని అనగా 5 ను ప్రతి మధ్య విలువకు కలిపితే తరగతుల ఎగువ అవధులు లభిస్తాయి. 5ను ప్రతి మధ్య విలువనుండి తీసివేస్తే తరగతుల దిగువ అవధులు లభిస్తాయి.

మధ్యవిలువ mv	తరగతులు x	పౌనఃపున్యము f	సంచిత పౌనఃపున్యము cf
25	20-30	12	12
35	30-40	19	31
45	40-50	23	54
55	50-60	26	80
65	60-70	32	112
75	70-80	35	147
85	80-90	27	174
95	90-100	21	195
105	100-110	18	213
115	110-120	17	230
		N = 230	

మధ్యగత స్థానం $\frac{N}{2}$ వ అంశం N = 230

$= \frac{230}{2}$ వ అంశం 115 వ అంశం

115 వ అంశం 147 అనే cf లో ఉన్నది. దానికెదురుగా ఉన్న తరగతి 70-80

మధ్యగతపు తరగతి 70-80

మధ్యగతం $M = l + \frac{C x i}{f}$

$l = 70$, $c = (115 - 112) = 3$, $i = 10$, $f = 35$

$$= 70 + \frac{3 \times 10}{35}$$

$$= 70 + 0.86 = 70.86$$

గమనిక : అన్ని మధ్య విలువలను తరగతులలోనికి మార్చనవసరం లేదు. మధ్యగత ప్రస్థానం ఏ cf లో ఉన్నదో, దాని కెదురుగా ఉన్న మధ్య విలువలను తరగతిగా మార్చుకుంటే చాలును.

7)

సంచిత పౌనఃపున్య దత్తాంశము - మధ్యగతం

ఒక్కొక్కప్పుడు దత్తాంశాన్ని "కంటే తక్కువ" "కంటే ఎక్కువ" అని ఇవ్వడం జరుగుతుంది. అనగా పౌనఃపున్యం సంచితం చేయబడింది అని అర్థం. కాని మధ్యగతం కనుగొనడానికి తరగతుల యొక్క దిగువ అవధులు మరియు తరగతి అంతరాలు అవసరం. అందుచేత "కంటే తక్కువ" "కంటే ఎక్కువ" అని ఇచ్చిన శ్రేణులను సాధారణ తరగతులుగా, సాధారణ పౌనఃపున్యంగా పునర్నిర్మించుకోవలెను.

ఉదాహరణ 7 : దిగువ దత్తాంశం నుండి మధ్యగతాన్ని లెక్కించండి.

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
30 కంటే తక్కువ	4
40 కంటే తక్కువ	14
50 కంటే తక్కువ	28
60 కంటే తక్కువ	45
70 కంటే తక్కువ	60
80 కంటే తక్కువ	70

జవాబు : దత్తాంశం సంచిత పౌనఃపున్యంగా ఇవ్వబడింది కనుక దానిని సాదారణ పౌనఃపున్యంగా మార్చి తరగతులను, అవధులను కనుగొనవలెను.

సాధారణ పౌనఃపున్యం

మార్కులు x	విద్యార్థుల సంఖ్య f	సంచిత పౌనఃపున్యం cf
20 - 30	4 - 0 = 4	4
30 - 40	14 - 4 =10	14
40 - 50	28 -14 =14	28
50 - 60	45 - 28 =17	45
60 - 70	60 - 45 =15	60
70 - 80	70 - 60 =10	70
	N = 70	

మధ్యగతపు స్థానము = $\frac{N}{2}$ వ అంశం N =70

= $\frac{70}{2}$ వ అంశం = 35 వ అంశం

35వ అంశం 45 అనే లో ఉన్నది

దానికి ఎదురుగా ఉన్న తరగతి 50 - 60 కనుక మధ్యగతపు తరగతి 50 - 60

మధ్యగతం $M = l + \frac{c \times i}{f}$

l = 50, c = 7 (35 - 28) i = 10, f = 17

$= 50 + \frac{7 \times 10}{17} = 50 + 4.12$

మధ్యగత మార్కులు = 54. 12

ఉదాహరణ 8 : మధ్యగతం లెక్కించండి

విలువలు	పౌనఃపున్యం
100.0 కంటె ఎక్కువ	150
102.5 కంటె ఎక్కువ	141
105.0 కంటె ఎక్కువ	129
107.5 కంటె ఎక్కువ	116
110.0 కంటె ఎక్కువ	96
112.5 కంటె ఎక్కువ	71
115.0 కంటె ఎక్కువ	45
117.5 కంటె ఎక్కువ	22
120.0 కంటె ఎక్కువ	10

జవాబు

x	f	c.f	
100.0 - 102.5	150 - 141 = 9	9	
102.5 -105.0	141 - 129 = 12	21	N = 150 మధ్యగతపు స్థానం $\frac{N}{2}$ వ అంశం
105.0 - 107.5	129 - 116 = 13	34	
107.5 - 110.0	116 - 96 = 20	54	
110.0 - 112.5	96 - 71 = 25	79	$\frac{150}{2}$ వ అంశం = 75వ అంశం
112.5 - 115.0	71 - 45 = 26	105	
115.0 - 117.5	45 - 22 = 23	128	75వ అంశం 79అనే c.f లో ఉంది. దానికి ఎదురుగా
117.5 - 120.0	22 - 10 = 12	140	ఉన్న తరగతి 110.0 - 112.5 మధ్యగతపు తరగతి 110 - 112.5
120.5 - 122.5	10 - 0 = 10	150	

మధ్యగతం $M = l + \frac{c \times i}{f}$

l = 110 of - c = (75 - 54)

L = 50, c = 7 (35 - 28) = 21; i = 2.5, F= 25

$$M = 110.0 + \frac{21 \times 2.5}{25}$$

$$= 110.0 + \frac{52.5}{25} = 110.0 + 2.1$$

మధ్యగతం = 112.1

5.11 చతుర్థాంశాలు (Quartiles)

చతుర్థాంశాలు కూడా మధ్యగతం వలెనే స్థానాన్ని బట్టి లెక్కించబడతాయి. చతుర్థాంశాలు మధ్యగతం సిద్ధాంతాన్ని పోలిన సూత్రాల మీద ఆధారపడి ఉంటాయి. మధ్యగతము, దత్తాంశాన్ని రెండు సమాన భాగాలుగా విభజిస్తుంది. చతుర్థాంశం మొత్తం దత్తాంశమును నాలుగు సమాన భాగాలుగా విభజిస్తుంది. రెండు సమాన భాగాలుగా చేయడానికి (మధ్యగతం కనుగొనడానికి) 2తో భాగించవలెను. నాలుగు సమాన భాగాలుగా చేయడానికి 4చే భాగించవలె.

చతుర్థాంశాలు మొత్తం మూడు. వాటిని Q_1, Q_2, Q_3 అని పిలుస్తారు. Q_2 అనేది మధ్యగతానికి మరోపేరు. కాబట్టి మనం తెలుసుకొనవలసినవి రెండు చతుర్థాంశాలు మాత్రమే అవి

1. మొదటి చతుర్థాంశము లేదా దిగువ చతుర్థాంశం Q_1 (First Quartile or lower quantile)
2. మూడవ చతుర్థాంశము లేదా ఎగువ చతుర్థాంశం Q_3(Third Quartile or upper quantile)

మెదటి చతుర్థాంశము : **(First Quartile)** Q_1

ఇది వరుస క్రమంలో అమర్చిన దత్తాంశమును 25శాతం వరకు విభజించిన అంశం. ఇది మెత్తం అంశాలలో నాలుగవవంతుతో సమానం కాబట్టి నాలుగుతో భాగించవలె.

వ్యక్తిగత శ్రేణులు $Q_1 = \frac{N+1}{4}$ వ అంశము

విచ్ఛిన్న శ్రేణులు $Q_1 = \frac{N+1}{4}$ వ అంశము. ఈసూత్రం ద్వారా లభించిన విలువను Cf లా గుర్తించి, దాని కెదురుగా ఉన్న తరగతిని Q_1గా భావించవలె.

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు : Q_1 స్థానం $\frac{N}{4}$ వ అంశము. ఈసూత్రంద్వారా లభించిన ఫలితాన్ని Cf లో గుర్తించి, దాని కెదురుగా ఉన్న తరగతిని Q_1 తరగతిగా తీసుకొని $l + \frac{Cxi}{f}$ అనే సూత్రామును ప్రయోగించవలె.

మూడవ చతుర్థాంశము లేదా ఎగువ చతుర్థాంశము Q_3:

ఇది వరుసగా అమర్చిన దత్తాంశంను 75 శాతం వరకు విభజించిన అంశం ఇది మొత్తం దత్తాంశంలో వంతులో $\frac{3}{4}$ సమానంగా. కాబట్టీ నాలుగుచే భాగించి మూడుచే హెచ్చించవలె

వ్యక్తిగత శ్రేణులు: $Q_3 = \frac{N \pm 1}{4}$ వ అంశం

విచ్ఛిన్న శ్రేణులు : $Q_3 = \frac{N \pm 1}{4}$ వ అంశాన్ని Cf లో గుర్తించి, దానికెదురుగా ఉన్న చలనాన్ని Q_3గా తీసుకొనవలె.

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు : Q_3 స్థానం $\frac{N}{4} x3$ వ అంశం దీనిని Cf లో గుర్తించి, దాని కెదురుగా ఉన్న చలనాన్ని Q_3 తరగతిగా తీసుకొని $l + \frac{Cxi}{f}$ అనే సూత్రం ప్రయోగించవలె.

గమనిక : మధ్యగతం లెక్కించడానికి ఏఏ జాగ్రత్తలు తీసుకోబడి నాయో అవి అన్నియు చతుర్థాంశం కనుగొనడానికి కూడా తీసుకొనవలె. ఉదాహరణకు Inclusive Series ను Exclusie Series గా మార్చిన తరువాత మాత్రమే చతుర్థాంశాలు లెక్కించవలె.

వ్యక్తిగత శ్రేణులు - చతుర్థాంశాలు

ఉదాహరణ 9 : చతుర్థాంశాలు కనుగొనండి

వేతనాలు రుపాయలలో : 76, 67. 64. 61. 70.73. 74. 68. 75. 69. 66

జవాబు :

క్రమసంఖ్య	వేతనాలు ఆరోహణ క్రమంలో
1	61
2	64
3	66
4	67
5	68
6	69
7	70
8	73
9	74
10	75
11	76
N = 11	

$Q_1 + \frac{N+1}{4}$ వ అంశం Q_1= దిగువ చతుర్థాంశం లేదా మొదటి చతుర్థాంశం

N = అంశాల సంఖ్య = 11

$= \frac{11+1}{4}$ వ అంశం $= \frac{12}{4}$ వ అంశం = 3 వ అంశం

ఇక్కడ 3 వ అంశం = 66

కాబట్టి Q_1 = రూ. 66

$Q_3 = \frac{N+1}{4} x 3$ వ అంశం Q_3 = ఎగువ చతుర్థాంశం లేదా మూడవ చతుర్థాంశం N = అంశాల సంఖ్య = 11

$= \frac{11+1}{4} x3$ వ అంశం $= \frac{12}{4} x 3$ వ అంశం = 9 వ అంశం ఇక్కడ 9 వ అంశం = 74

$\therefore Q_3 = 74$

పై ఉదాహరణలో అంశాల సంఖ్య 11 కు బదులుగా 12 ఉండే జవాబు క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

వేతనాలు : 76, 67, 64, 61, 70, 73, 74, 68, 75, 69, 66, 78

క్రమసంఖ్య	వేతనాలు ఆరోహణ క్రమంలో
1	61
2	64
3	66
4	67
5	68
6	69
7	79
8	73
9	74
10	75
11	76
12	78
N = 12	

$Q_1 = \frac{N+1}{4}$ వ అంశం $= \frac{12+1}{4}$ వ అంశం $= \frac{13}{4}$ వ అంశం

= 3.25 వ అంశం ఇక్కడ 3 వ అంశం 66

4 వ అంశం 67.

3.25 వ అంశం = 66 + 25% of 1 (67-66)

$66 + \frac{1x25}{100} = 66 + 0.25$

Q_1= 66.25

$Q_3 = \frac{N+1}{4} x3$ వ అంశం $= \frac{12+1}{4} x3$ వ అంశం $= \frac{13}{4} x3$ వ అంశం

= 9.75 అంశం, ఇక్కడ 9 వ అంశం = 74, 10 వ అంశం = 75

= 9.75 అంశం = 74 + 75% of 1(75-74)

$$74 + 1x\frac{75}{100} = 74 + 0.75$$

Q_3 = 74.75

విచ్ఛిన్న శ్రేణులు - చతుర్థాంశాలు :

ఉదాహరణ 10 :- చతుర్థాంశాలు కనుగొనండి.

పిల్లల సంఖ్య	0	1	2	3	4	5	6
కుటుంబాల సంఖ్య	13	54	75	90	64	21	15

జవాబు :-

x	f	cf
0	13	13
1	54	67
2	75	142
3	90	232
4	64	296
5	21	317
6	15	332
		N = 332

$Q_1 = \frac{N+1}{4}$ = వ అంశం $= \frac{332+1}{4}$ వ అంశం $= \frac{333}{4}$ వ అంశం

= 83.25 వ అంశం; 83.25 వ అంశం 142 అనే cf లో ఉన్నది. దానికి ఎదురుగా ఉన్న చలనం విలువ 2 కాబట్టి $Q_1 = 2$

$Q_3 = \frac{N+1}{4} x3$ వ అంశం $= \frac{332+1}{4} x3$ వ అంశం $= \frac{333}{4} x3$వ అంశం

= 249.75 వ అంశం 249.75 వ అంశం 296 అనే cf లో ఉన్నది. దానికి ఎదురుగా ఉన్న చలనం 4. కాబట్టి $Q_3 = 4$

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు - చతుర్థాంశాలు :

ఉదాహరణ 11 : చతుర్థాంశాలు కనుగొనండి.

మార్కులు :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
విద్యార్థులు :	5	8	13	9	5

జవాబు :

మార్కులు x	విద్యార్థులు f	సంచిత పౌనఃపున్యము cf
0-10	5	5
10-20	8	13
20-30	13	26
30-40	9	35
40-50	5	40
	N = 40	

Q_1 స్థానం $\frac{N}{4}$ వ అంశం $\frac{40}{4} = 10$ వ అంశం

10 వ అంశం "cf" 13 లో ఉన్నది దాని తరగతి 10 -20

$Q_1 = l + \frac{Cxi}{f}$; l = 10, C = 5 (10-5); i = 10; f = 8

$$= 10 + \frac{5x10}{8} = 10 + 6.25 \qquad \therefore Q_1 = 16.25$$

Q_3 స్థానం $Q_3 = \frac{N}{4} x3$ వ అంశం $= \frac{40}{4} x3$ వ అంశం 30 వ అంశం. ఇది 35 అనే cf లో ఉన్నది

దానికెదురుగా ఉన్న తరగతి = 30-40

అనగా Q_3 తరగతి : 30-40

$$Q_3 = l + \frac{c\ x\ i}{f}$$

$\therefore$ l = 30; C = 4(30 – 26) i = 10, f = 9

$$30 + \frac{4x10}{9}$$
$$= 30 + 4.44$$
$$Q_3 = 34.44$$

దశాంశాలు (Deciles) : దశాంశాలు కూడా మధ్యగతం వలెనే స్థానాన్ని బట్టి లెక్కించబడతాయి. మధ్యగతం దత్తాంశాన్ని రెండు సమాన భాగాలు చేస్తుంది. దశాంశం దత్తాంశాన్ని పది సమాన భాగాలుగా విభజిస్తుంది. రెండు సమాన భాగాలుగా చేయడానికి రెండుచే భాగించవలె. పది సమాన భాగాలు చేయడానికి పదిచే భాగించవలె.

వ్యక్తిగత శ్రేణులు = మొదటి దశాంశం = $\frac{N+1}{10}$ వ అంశం.

రెండవ దశాంశం = $\frac{N+1}{10}x2$ వ అంశం   ఏడవ దశాంశం = $\frac{N+1}{10}x7$ వ అంశం

వ్యక్తిగత శ్రేణులు : మొదటి దశాంశం = $\frac{N+1}{10}$ వ అంశం

విచ్ఛిన్న శ్రేణులు : మొదటి దశాంశం = $\frac{N+1}{10}$ వ అంశం, దీనిని cf లో గుర్తించి, దానికెదురుగా ఉన్న చలనమును దశాంశంగా తీసుకొనవలె.

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు : మొదటి దశాంశం = $\frac{N}{10}$ వ అంశం. దీనిని cf లో గుర్తించి, దానికెదురుగా ఉన్న తరగతిని దశాంశపు తరగతిగా తీసుకొని $1+\frac{Cxi}{f}$ అనే సూత్రం ప్రయోగించవలె.

గమనిక : మధ్యగతం లెక్కించడానికి అనుసరించిన పద్ధతులన్నియు దశాంశానికి కూడా వర్తిస్తాయి.

శతాంశాలు (Percentiles): శతాంశము, దత్తాంశమును 100 సమాన భాగాలుగా విభజిస్తుంది. అందుచేత మొత్తం దత్తాంశాన్ని 100 చే భాగించవలె. మధ్యగతం లెక్కించడానికి అనుసరించిన పద్ధతులన్నియు దీనికి కూడా వర్తిస్తాయి.

వ్యక్తిగత శ్రేణులు : మొదటి శతాంశము $\frac{N+1}{100}$ వ అంశం

3 వ శతాంశం = $\frac{N+1}{100}x3$ వ అంశం   21 వ శతాంశం = $\frac{N+1}{100}x21$ వ అంశం

97 వ శతాంశం = $\frac{N+1}{100}x97$ వ అంశం

విచ్ఛిన్న శ్రేణులు : మొదటి శతాంశము $\frac{N+1}{100}$ వ అంశం, దీనిని Cf లో గుర్తించి దానికి ఎదురుగా ఉన్న చలనాన్ని శతాంశముగా తీసుకొనవలె.

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు : మొదటి శతాంశము $\frac{N}{100}$ వ అంశం, దీనిని Cf లో గుర్తించి, దానికి ఎదురుగా ఉన్న తరగతిని శతాంశపు తరగతిగా తీసుకొని $1+\frac{Cxi}{f}$ అనే సూత్రాన్ని ప్రయోగించవలె.

దశాంశాలు, శతాంశాలు గాక స్థానాన్ని బట్టి లెక్కించే అంశాలు మరికొన్ని ఉన్నాయి. అవి 1) పంచమాంశాలు (Quintiles) 2) అష్టాంశాలు (Octiles) వీటిని లెక్కించడానికి కూడా మధ్యగతం లెక్కించడానికి అనుసరించిన సూత్రాలే వర్తిస్తాయి.

పంచమాంశం లెక్కించడానికి దత్తాంశాన్ని 5 చే భాగించవలె. అష్టాంశం లెక్కించడానికి దత్తాంశాన్ని 8 చే భాగించవలె.

వ్యక్తిగత శ్రేణులు :

ఉదాహరణ 15 : క్రింది దత్తాంశం నుండి మొదటి దశాంశాన్ని, 7 వ దశాంశాన్ని, 9 వ దశాంశాన్ని 33 వ శతాంశాన్ని, 76 వ శతాంశాన్ని, మొదటి పంచమాంశాన్ని, 4వ పంచమాంశాన్ని, అష్టాంశాన్ని 7వ అష్టాంశాన్ని కనుగొనండి.

30 మంది విద్యార్థుల మార్కులు : 35, 76, 63, 24, 12, 95, 47, 55, 85, 93, 3, 18, 29, 59, 69, 30, 29, 51, 68, 71, 80, 99, 8, 13, 41, 89, 73, 20, 9, 5.

జవాబు : వ్యక్తిగత శ్రేణులు ఇవ్వబడినాయి. వాటిని వరుసక్రమంలో అమర్చవలె.

క్రమసంఖ్య	మార్కులు ఆరోహణక్రమంలో
1	3
2	5
3	8
4	9
5	12
6	13
7	18
8	20
9	24
10	29
11	29
12	30
13	35
14	41
15	47
16	51
17	55
18	59
19	63
20	68
21	69
22	71
23	73
24	76
25	80
26	85
27	89
28	93
29	95
30	99

N = 30

మొదటి దశాంశం : $\frac{N+1}{10}$వ అంశం $\frac{30+1}{10}$ వ అంశం = 3.1 వ అంశం

ఇక్కడ 3వ అంశం = 8, 4వ అంశం =9

3.1 వ అంశం = 8 + 10 % of 1(9-8)

$= 8 + \left(1 \times \frac{10}{100}\right) = 8 \times 0.1$

మొదటి దశాంశం = 8.1

7 వ దశాంశము = $\frac{N+1}{10}$ X 7వ అంశం 21.7 వ అంశం

ఇక్కడ 21 వ అంశం = 69, 22 వ అంశం = 71

21.7వ అంశం = 69 + 70 % of 2 (71 - 69)

$= 69 + \left(2 \times \frac{10}{100}\right) = 69 + 1.4$

7వ దశాంశం = 70.4

9వ దశాంశము $\frac{N+1}{10}$ X 9 వ అంశం $\frac{30+1}{10}$ X 9 వ అంశం = 27.9వ అంశం

ఇక్కడ 27వ అంశం = 89, 28వ అంశం = 93.

27.9 వ అంశం = 89 + 90 % of 4(93 - 89)

$= 89 + \left(4 \times \frac{90}{100}\right) = 89 + 3.6$

9వ దశాంశం = 92.6

33 వ శతాంశం = $\frac{30+1}{100} \times 1$ X 33 వ అంశం $\frac{30+1}{100} \times 1$

33వ అంశం = 10.23వ అంశం

ఇక్కడ 10వ అంశం = 29

11 వ అంశం = 29

10.23వ అంశం కూడా 29

33వ శతాంశము 29

76వ శతాంశము : $\frac{N+1}{100}$ X 76వ అంశం $\frac{30+1}{10}$ X 76వ అంశం

= 23. 56వ అంశం;

ఇక్కడ 23వ అంశం = 73

24వ అంశం = 76

23.56వ అంశం = 73 + 56% of 3(76 - 73) = 73 + $\left(3 \text{X} \frac{56}{100}\right)$

= 73 + 1.68

76 వ శతాంశం = 74.68

1 వ పంచమాంశం = $\frac{N+1}{5}$ వ అంశం, $\frac{30+1}{5}$ వ అంశం; $\frac{31}{5}$ వ అంశం = 6.2వ అంశం.

ఇక్కడ 6వ అంశం = 13

7వ అంశం = 18.

6.2 వ అంశం 13 + 20 % of 5 (18 - 13)

= 13 + $\left(5 \text{ X } \frac{20}{100}\right)$ = 13 + 1

1 వ పంచమాంశం = 14

4వ పంచమాంశం

$\frac{N+1}{5}$ 4వ అంశం; = $\frac{30+1}{5}$ 4వ అంశం $\frac{31}{5}$ 4వ అంశం; 24.8 వ అంశం

ఇక్కడ 24వ అంశం = 76

25వ అంశం = 80

24.8వ అంశం = 76 + 80 % of 4 (80 - 76) ; 76 + 3.2 = 79.2

అష్టాంశము (Octile) $\frac{N+1}{8}$ వ అంశం; $\frac{30+1}{8}$వ అంశం, 3.87 వ అంశం; ఇక్కడ 3వ అంశం = 8

4వ అంశం = 9

3.875 వ అంశం = 8 + 87.5%

3.875 వ అంశం = 8 + 87.5% of 1 (9 - 8)

= 8 + $\left(1 \text{ X } \frac{875}{1000}\right)$ = 8 + 0.875

∴ అష్టాంశం = 8.875.

7వ అష్టాంశం = $\frac{N+1}{8}$ 7వ అంశం; $\frac{30+1}{8}$ x 7వ అంశం; $\frac{31}{8}$ X 7 వ అంశం; 27.125 వ అంశం;

ఇక్కడ 27 వ అంశం = 89 28 వ అంశం = 93

27.125 వ అంశం = 89 + 12.5 % of 4(93 - 98)

$$= 89 + \left(4 \times \frac{125}{1000}\right) = 89 + 0.500$$

7వ అష్టాంశము = 89.5

5.12 రేఖాచిత్రం ద్వారా మధ్యగతం లెక్కించడం (Calculation Median by Graphic Method):

రేఖాచిత్రం ద్వారా (graph) మధ్యగతాన్ని మధ్యగతంపై ఆధారపడిన ఇతర విలువలను కనుగొనవచ్చును. ఇందుకోసం సంచిత పౌనఃపున్యం ఆధారంగా సంచిత పౌనఃపున్య రేఖాచిత్రం (ఓజివ్ వక్రరేఖ Ogive curve) గీయవలెను. ఓజివ్ వక్రరేఖ ద్వార మధ్యగతాన్ని రెండు రకాలుగా గుర్తించవచ్చు. అవి :

1) సంచిత పౌనఃపున్య ఓజివ్ వక్రరేఖ ద్వారా (ఒకే వక్ర రేఖ ద్వారా)

2) "కంటే ఎక్కువ" "కంటే తక్కువ" ఓజివ్ వక్రరేఖల ద్వారా (రెండు రేఖలద్వారా)

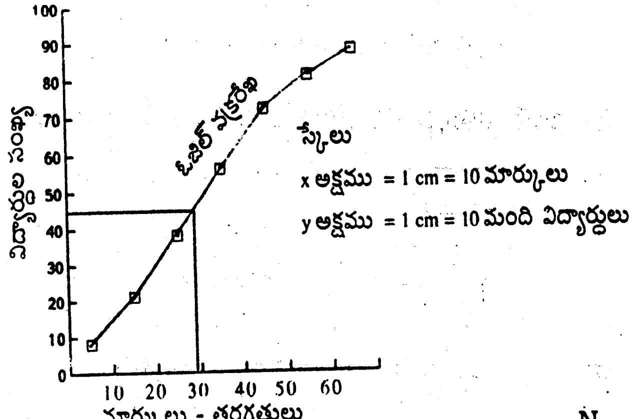
1. సంచిత పౌనఃపున్య ఒజివ్ వక్రరేఖ ద్వారా (ఒకే ఒక రేఖ ద్వారా): సంచిత పౌనఃపున్యం (cf) ఆధారముగా వక్రరేఖను నిర్మించవలెను ఇది "కంటే తక్కువ" అనే సూత్రం పై ఆధారపడి ఉంటుంది. N/2 కనుగొని, దానిని y అక్షం మీద గుర్తించి, అక్కడి నుండి x అక్షానికి సమాంతర రేఖ గీయవలెను. ఈ రేఖ ఓజివ్ వక్రరేఖను ఏదో ఒక బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది. అలా ఖండించిన బిందువు x నుండి అక్షానికి నిలువుగా లంబరేఖ గీస్తే అది x అక్షంను ఏ బిందువు వద్ద తాకుతుందో ఆ బిందువు విలువే మధ్యగతపు విలువ అవుతుంది. మధ్యగతం సూత్రం పై ఆధారపడిన ఇతర మానాలు అనగా చతుర్థాంశాలు, దశాంశాలు, శతాంశాలు, పంచమాంశాలు, అష్టాంశాలు మొదలైనవన్నియు ఇదే పద్ధతిమీద గుర్తించవచ్చును.

ఉదాహరణ : 18 : రేఖాచిత్రం ద్వారా మధ్యగతం గుర్తించండి.

మార్కులు :	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
విద్యార్థుల సంఖ్య :	8	13	17	18	16	9	7

జవాబు : మార్కులు x అక్షం మీద, "కంటే తక్కువ" సంచిత పౌనఃపున్యాలు y అక్షం మీద గుర్తించవలె

మార్కులు	విద్యార్థులు	సంచిత పౌనఃపున్యం
0 - 10	8	8
10 - 20	13	21
20 - 30	17	38
30 - 40	18	56
40 - 50	16	72
50 - 60	9	81
60 - 70	7	88



10 కంటె తక్కువ 8, 20 కంటే తక్కువ 21, 30 కంటే తక్కువ 38 కంటే అని లెక్కిస్తూ ఓజివ్ వక్రరేఖను గీయవలెను $\frac{N}{2}$ వ

అంశం అనగా $\frac{88}{2}$వ అంశం అనగా 44వ అంశమును y అక్షం మీద గుర్తించి ఆ బిందువు నుండి X అక్షానికి సమాంతరముగా ఓజివ్ వక్రరేఖను తాకునట్లుగా లంబరేఖ గీయవలెను. ఈ రేఖ అక్షమును ఎక్కడ ఖండిస్తుందో, అక్కడి నుండి X అక్షమును తాకునట్లుగా లంబరేఖ గీయవలెను. ఈ రేఖ X అక్షమును 33.3 వద్ద భూమిని తాకింది.

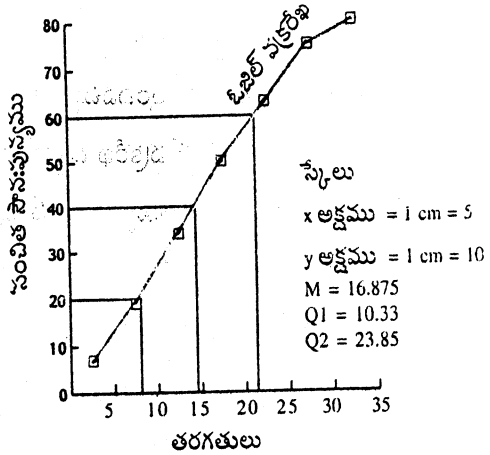
కాబట్టి మధ్యగత 33.3కు సమానమవుతుంది.

ఉదాహరణ 19 : క్రింది దత్తాంశము నుండి మధ్యగతంను, చతుర్థాంశాలను ఓజివ్ వక్రరేఖల ద్వారా రేఖాచిత్రంలో చూపండి.

తరగతి :	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35
పౌనఃపున్యం :	7	12	15	16	13	12	5

జవాబు :

తరగతి	పౌనఃపున్యం	సంచిత పౌనఃపున్యం (cf)
0 - 5	7	7
5 - 10	12	19
10 - 15	15	34
15 - 20	16	50
20 - 25	13	63
25 - 30	12	75
30 - 35	5	80
	N = 80	



$M = \frac{N}{2}$వ అంశం = 40 నుండి రేఖ y అక్షం నుండి ఓజివ్‌ను ఖండించి X అక్షాన్ని అనగా భూమి 16.875 వద్ద తాకింది. కాబట్టి మధ్యగతం = 16.875 (M)

$Q_1 = \frac{N}{4}$వ అంశం = 20 నుండి రేఖ y అక్షం నుండి ఓజివ్‌ను ఖండించి, X అక్షాన్ని అనగా భూమిని 10.33 వద్ద తాకింది.

కాబట్టి మొదటి చతుర్థాంశం = 10.33 (Q_1)

$Q_3 = \frac{N}{4}$వ అంశం = 60 నుండి రేఖ y అక్షం నుండి ఓజివ్‌ను ఖండించి, X అక్షాన్ని అనగా భూమిని 23.85 వద్ద తాకింది.

కాబట్టి తృతీయ చతుర్థాంశం = 23.85 (Q_3)

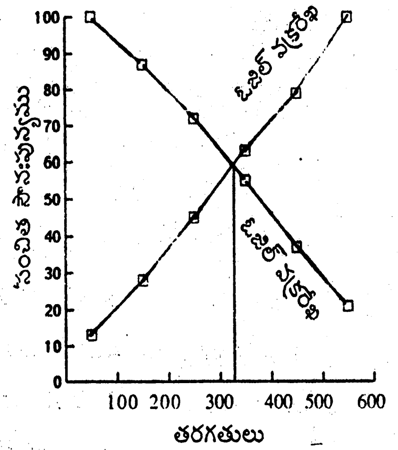
2. "కంటే ఎక్కువ" "కంటే తక్కువ" ఓజివ్ వక్రరేఖల ద్వారా : పౌనఃపున్యమును సంచితం చేయడమంటే; తరగతిలోని ఎగువ అవధిని ఆధారంగా తీసుకొని "కంటే తక్కువ" శ్రేణులు నిర్మించబడినాయి అని అర్థం. అదే విధంగా తరగతిలోని దిగువ అవధిని ఆధారంగా తీసుకొని "కంటే తక్కువ" పౌనఃపున్యం ఆరోహణ క్రమంలా ఉంటే, "కంటే ఎక్కువ" పౌనఃపున్యం అవరోహణ క్రమంలో ఉంటుంది. రెండింటి ఆధారంగా రెండు సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖలు (ఓజివ్ వక్రరేఖలు) గీయవలెను. ఆ రెండు రేఖలు ఒక బిందువు వద్ద ఒక దానితో మరొకటి ఖండించుకుంటాయి. ఈ బిందువు నుండి అక్షానికి అనగా భూమికి లంబరేఖ గీస్తే అది అక్షాన్ని ఎక్కడ తాకుతుందో అది మధ్యగతం విలువగా గుర్తించవచ్చు.

ఉదాహరణ 20 : రెండు ఓజివ్ వక్రరేఖల ద్వారా మధ్యగతాన్ని రేఖాచిత్రంలో చూపండి.

తరగతులు	:	0 - 100	100 - 200	200 - 300	300 - 400	400 - 500	500 - 600
పౌనఃపున్యం	:	13	15	17	18	16	21

జవాబు :

x	f	cf (కంటే తక్కువ)	cf (కంటే ఎక్కువ)
0 - 100	13	13	100
100 - 200	15	28	87
200 - 300	17	45	72
300 - 400	18	63	55
400 - 500	16	79	37
500 - 600	21	100	21
	N= 100		



రెండు ఓజివ్ వక్రరేఖలు (వీటినే సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖలు అంటారు) ఒకదానితో మరొకటి ఖండించిన చోటు నుండి గీసిన లంబం X అక్షానికి అనగా భూమిని ఏ బిందువు వద్ద తాకిందో అదే బిందువు మధ్యగతం 327.78 వద్ద ఆ లంబం భూమిని తాకింది. కాబట్టి మధ్యగతం విలువ = 327.78.

మధ్యగతం వలన ప్రయోజనాలు :

1. మధ్యగతం సులభంగా గణన చేయవచ్చును. చాలా త్వరితంగా అర్థం చేసుకోవచ్చును.
2. ఇది విపరీత అంశాల వలన **(Extreme)** ప్రభావితం చెందదు.
3. వివృత అవధులున్న **(Open ends)** తరగతులు ఉన్నపుడు ఇది ప్రత్యేకమ్ముగా ఉపయోగపడుతుంది.
4. గుణాత్మక దత్తాంశము ఉపయోగించేటపుడు అనగా తెలివితేటలు, అందము, ఆస్తులు, బీదరికము మొదలైనవి తెలుసుకోవడానికి ఇది చాలా ఉపకరిస్తుంది.
5. అసంపూర్తి దత్తాంశంనుండి అయిననూ, అసమాన తరగతి అంతరాలతో ఇచ్చిననూ మధ్యగతం లెక్కించవచ్చును.

లోపాలు :

1. ఇది స్థానాన్ని బట్టి లెక్కించే సగటు కాబట్టి సరిసంఖ్యలు గల అంశాలున్నప్పుడు నిజమైన సంఖ్య కనుగొనడం సాధ్యం కాదు.
2. బీజీయ ప్రస్తావనకు ఇది నిలబడదు.
3. ఇది విపరీత అంశాలను పరిగణలోనికి తీసుకోదు.
4. ఎక్కువ విషయాలలో ఇది దత్తాంశానికి ప్రాతినిధ్యం వహించేదిగా ఉండదు. ఉదాహరణకు 12, 15, 16, 20, 90 అనే అయిదు అంశాలు ఉన్నపుడు మధ్యగతం 16 అవుతుంది. కాని ఇది దత్తాంశానికి ప్రాతినిధ్యం వహించదు.

5.13 సారాంశము

అంకమధ్యమం అనేది సాధారణ సగటు. రాశుల మొత్తాన్ని రాశుల సంఖ్యచేత భాగించగా వచ్చే విలువను అంకమధ్యమం అంటారు. ఇది గణనచేయగా వచ్చే సగటు **(Calculated Average)**. వ్యక్తిగత విచ్ఛిన్న, అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో దీనిని లెక్కిస్తారు. దీనిని లెక్కించడానికి రెండు పద్ధతులున్నాయి. 1. ప్రత్యక్ష పద్ధతి, 2. దగ్గర పద్ధతి. సగటులలో రెండవది మధ్యగతం. ఇది స్థానాన్ని బట్టి లెక్కించే సగటు **(Positional Average)**. శ్రేణులను ఆరోహణ క్రమంలోగాని అవరోహణ క్రమంలో గాని అమర్చినపుడు, అందులో మధ్యలో ఉన్న విలువను మధ్యగతం అంటారు. మధ్యగతం శ్రేణులను రెండు సమాన భాగాలుగా చేస్తుంది. దీనిని కూడా వ్యక్తిగత, విచ్ఛిన్న, అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులద్వారా లెక్కిస్తారు. చతుర్థాంశాలు, పంచమాంశాలు, అష్టాంశాలు, దశాంశాలు మరియు శతాంశాలు కూడా స్థానాన్ని లెక్కించే

కొలతలే. మధ్యగతం లెక్కించడానికి ఏ పద్ధతి అనుసరించబడిందో, అదే పద్ధతిని చతుర్థాంశాలు వగైరాలు లెక్కింపునకు అనుసరించవలె. మధ్యగతం, చతుర్థాంశాలు మొదలైన వాటిని రేఖాచిత్ర పద్ధతి ద్వారా కూడా లెక్కించవచ్చును.

5. 14. ప్రశ్నలు :

1. సగటు అనగానేమి ? సగటు అర్థాన్ని ప్రాముఖ్యాన్ని వివరించండి.
2. కేంద్రాస్థాన కొలతల ఉద్దేశాలు వివరించండి.
3. మంచి సగటుకు ఉండవలసిన లక్షణాలను వివరించండి.
4. సగటులలో వివిధ రకాలను గూర్చి వ్రాయండి.
5. అంకమధ్యమము అనగానేమి ? దాని ధర్మాలను ప్రయోజనాలను వివరించండి.
6. భారిత అంకమధ్యమం అనగానేమి, వివరించి, ఆవశ్యకతను తెలుపండి.
7. మధ్యగతం అనగా నేమి ? దాని ప్రయోజనాలను, లోపాలను వివరించండి ?
8. చతుర్థాంశాలు, దశాంశాలు, శతాంశాల గురించి వివరించండి?

అభ్యాసాలు

1. క్రింది దత్తాంశమునకు అంకమధ్యమం కనుగొనండి.

క్రమసంఖ్య	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
మార్కులు	43	48	76	64	18	35	67	56	85	3

2. క్రింది దత్తాంశం నుండి సగటు ఎత్తు కనుగొనండి.

ఎత్తు సెంమీ	160	161	162	163	164	165	166	167	168
వ్యక్తుల సంఖ్య	5	8	11	13	15	16	14	9	7

3. అంకమధ్యమం గణన చేయండి.

తరగతులు	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50
పౌనఃపున్యము	3	6	8	13	16	17	14	12	9	2

4. క్రింది పట్టిక 200 సంస్థల లాభనష్టాలు చూపుతున్నది. సగటు లాభం లెక్కించండి.

లాభం రూ...			సంస్థల సంఖ్య
5000	నుండి	6000	16
4000	"	5000	24
3000	"	4000	60
2000	"	3000	20
1000	"	2000	10
0	"	1000	10
-1000	"	0	12
-2000	"	-1000	16
-3000	"	-2000	18
-4000	"	-3000	14
			200

5. అంకమధ్యమము లెక్కించండి ?

లాభాలు (రూ..)			సంస్థల సంఖ్య
500	నుండి	600	20
400	"	500	30
300	"	400	60
200	"	300	20
100	"	200	10
0	"	100	8
-100	"	0	12
-200	"	-100	16
-300	"	-200	20

6. అంకమధ్యమం గణన చేయండి.

మార్కులు :	1 - 10	11 - 20	21 - 30	31 - 40	41 - 50	51 - 60	61 - 70	71 - 80	81 - 90	91 - 100
విద్యార్థులు:	2	7	8	13	19	17	16	12	4	2

7. రెడీమేడ్ గార్మెంట్స్ దుకాణము యువకుల కొరకై క్రొత్త మెడపట్టీలతో చొక్కాలను ఉత్పత్తి చేయ నిర్ణయించింది. అందుకొరకై కొందరు విద్యార్థుల మెడచుట్టు కొలతలు సేకరించినది. ఆ వివరములు ఈ దిగువ ఇవ్వబడినాయి. అంకమధ్యము చుట్టుకొలత ఎంత?

మెడ చుట్టుకొలతల తరగతి యొక్క మధ్యవిలువ (అంగుళములలో):	12.5	13.0	13.5	4.0	14.5	15.0	15.5	16.0	16.5
విద్యార్థుల సంఖ్య	4	19	30	63	66	29	18	1	1

8. అంకమధ్యమం కనుగొనండి.

మార్కులు			విద్యార్థుల సంఖ్య
10	కంటే	తక్కువ	3
20	"	"	7
30	"	"	12
40	"	"	21
50	"	"	34
60	"	"	51
70	"	"	67
80	"	"	82
90	"	"	91
100	"	"	100

9. మధ్యమము కనుగొనండి.

వేతనం			కార్మికుల సంఖ్య
0	కంటే	ఎక్కువ	100
5	"	"	97
10	"	"	90

15	"	"	81
20	"	"	68
25	"	"	50
30	"	"	35
35	"	"	23
40	"	"	12
45	"	"	5
50	"	"	0

10. క్రింది దత్తాంశము నుండి ధరల సూచీలకు సంబంధించిన భారిత అంకమధ్యమం కనుగొనండి.

వస్తువు	భారాలు	సూచీ సంఖ్య
1	21	125
2	7	100
3	11	70
4	5	175
5	8	200
6	10	107

11. మధ్యగతం కనుగొనండి.

మార్కులు : 75, 24, 42, 57, 63, 49, 91, 12, 8, 20, 35

12. మధ్యగతం గణన చేయండి?

పిల్లల సంఖ్య:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
కుటుంబాల సంఖ్య:	7	12	75	89	80	47	35	23	12	13	5

13. మధ్యగతం గణన చేయండి?

వేతనాలు రూ.లలో :	31	32	33	34	35	36	37	38	40
కార్మికుల సంఖ్య :	3	7	8	13	16	15	14	5	2

14. మధ్యగతం గణన చేయండి?

మార్కులు:	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 -90
విద్యార్థులత సంఖ్య:	8	9	13	16	17	15	12	7	3

15. మధ్యగతం, చతుర్థాంశం, తృతీయ చతుర్థాంశం కనుగొనండి?

తరగతులు :	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40
పౌనఃపున్యం :	7	12	15	19	18	17	16	13

16. మధ్యగతం, దిగువ చతుర్థాంశం, ఎగువ చతుర్థాంశం దశాంశం, శతాంశం గణన చేయండి.

చలనాలు :	1 - 5	6 - 10	11 - 15	16 - 20	21 - 25	26 - 30	31 - 35	36 - 40	41 - 45	46 - 50
పౌనఃపున్యం:	3	5	8	13	14	17	16	12	9	5

17. 1) మధ్యగతం, అంకమధ్యమం, చతుర్థాంశాలు లెక్కించండి ?

తరగతుల మధ్యవిలువలు :	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.0	15.5	16.0	16.5	17.0
పౌనఃపున్యం :	13	19	23	27	28	31	26	21	18	17

2)మధ్యగతం గణన చేయండి ?

మార్కులు			విద్యార్థుల సంఖ్య
10	కంటే	తక్కువ	3
20	"	"	9
30	"	"	18
40	"	"	30
50	"	"	43
60	"	"	60
70	"	"	76
80	"	"	90
90	"	"	98
100	"	"	100

18. మధ్యగతం, చతుర్థాంశాలు, 3వ దశాంశం, 76వ శతాంశం కనుగొనండి.

విలువలు			సంచిత పౌనఃపున్యం
30	కంటే	ఎక్కువ	200
32.50	"	"	187
35	"	"	170
37.50	"	"	149
40	"	"	124
42.50	"	"	97
45	"	"	73
47.50	"	"	51
50	"	"	32
52.50	"	"	16
55	"	"	7

19. మధ్యగతం, చతుర్థాంశాలు కనుగొనండి.

ఉత్పత్తి		ప్లాంటుల సంఖ్య
420	పైన	7
360	"	13
300	"	31
240	"	57
180	"	98
120	"	156
60	"	210
0	"	216

20. ఓజివ్ వక్రరేఖ ద్వారా మధ్యగతమును, మొదటి చతుర్థాంశమును, మూడవ చతుర్థాంశమును రేఖాచిత్రంలో చూపండి.

తరగతులు :	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50
పౌనఃపున్యం :	4	7	12	13	18	15	14	9	5	3

పాఠం - 6

సగటులు - II
(AVERAGES -II)

ఉద్దేశ్యాలు : (Objectives) : ఈ పాఠ్యాంశాన్ని అధ్యయనం చేయడం వలన మీరు

1) బాహుళకం అంటే ఏమిటి?
2) బాహుళకం గణన చేయడం ఎలా?
3) బాహుళకం యొక్క సుగుణాలు, పరిమితులు ఏమిటి?
4) గుణమధ్యమం, హరమధ్యమం అంటే ఏమిటి? వాటి గణన చేయడం ఎలా?

అనే విషయాలను వివరంగా తెలుసుకొనగలరు.

నిర్మాణం (Structure) :

6.1 బాహుళకం - నిర్వచనం, అర్థం

6.2 బాహుళకం గణన - వ్యక్తిగత శ్రేణులు
- విచ్ఛిన్న శ్రేణులు
- అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు

6.3 రేఖాచిత్రం ద్వారా బహుళకాన్ని గుర్తించడం

6.4 బాహుళకం సుగుణాలు - పరిమితులు

6.5 గుణమధ్యమం - అర్థం, నిర్వచనం

6.6 గుణమధ్యమం గణన - వ్యక్తిగత శ్రేణులు
- విచ్ఛిన్న శ్రేణులు
- అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు

6.7 గుణమధ్యమం సుగుణాలు పరిమితులు

6.8 హరమధ్యమం - నిర్వచనం, అర్థం

6.9 హరమధ్యమం గణన - వ్యక్తిగత శ్రేణులు
- విచ్ఛిన్న శ్రేణులు
- అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు

6.10 హరమధ్యమం - సుగుణాలు - పరిమితులు

6.11 సారాంశము.

6.12 ప్రశ్నలు

6.13 అభ్యాసాలు.

6.1 సగటు - బాహుళకం (Mode)

బాహుళకం అంటే పౌనఃపున్య విభజనంలో ఏదో ఒక విలువ, మిగతా విలువల కంటే ఎక్కువ సార్లు కనిపించడం. ఒక సంఘటన ఎక్కువసార్లు రావడాన్ని బాహుళకం అంటారు. దీనినే ఫ్యాషన్ లేదా నమూనా విలువ (Model value) లేదా మాదిరి (Typical value) అంటారు. శ్రేణులలో ఉన్న అంశాలలో ఏ విలువ అతి తరచుగా వస్తుందో "ఆ విలువను" ఇంకా ఏ విలువ చుట్టూ అత్యధికంగా ఇతర విలువల పంపిణీ జరుగుతుందో ఆ విలువను బాహుళకమనవచ్చు: అని జీజెక్ (Zizek) అన్నాడు. మధ్యగతం వలెనే, బాహుళకం కూడా స్థానాన్ని బట్టి లెక్కించే సగటు. (Positional Average).

6.2 బాహుళకం గణన : బాహుళకాన్ని వ్యక్తిగత, విచ్ఛిన్న, అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో గణన చేస్తారు.

వ్యక్తిగత శ్రేణులు : వ్యక్తిగత శ్రేణులలో ఒకే విలువ పునరావృతం కానపుడు, ఆశ్రేణులలో బాహుళకం లేదు అని చెప్పవచ్చును. అయితే ఏదైన ఒక విలువ పునరావృతమైతే, వ్యక్తిగత శ్రేణులలో కూడా బాహుళకాన్ని గుర్తించవచ్చు ఏ విలువైతే ఎక్కువ సార్లు పునరావృతమవుతుందో ఆ విలువను బాహుళకంగా పరిగణిస్తారు.

ఉదా: 10 మంది విద్యార్థుల మార్కులు వరుసగా 75, 49, 26, 35, 58, 67, 21, 12, 3, 93 అయినచో - ఇందులో ఏ విలువా పునరావృతంకాలేదు. కాబట్టీ ఆ శ్రేణులలో బాహుళకం లేదని చెప్పవచ్చును.

ఉదాహరణకు 10 మంది విద్యార్థుల మార్కులు వరుసగా 5, 18, 25, 36, 49, 53, 67, 53, 25, 23 అయితే 53 అనే విలువ మూడుసార్లు కనిపిస్తోంది. మరే ఇతర విలువ మూడుసార్లు కనిపించలేదు. కాబట్టి బాహుళకం విలువ 53 అని చెప్పవచ్చును.

విచ్ఛిన్న శ్రేణులు : బాహుళకం అనేది అత్యధిక సాంద్రతగల బిందువు లేదా పౌనఃపున్య పంపిణీలో అత్యధిక పౌనఃపున్యం విలువ. కాబట్టి విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో అత్యధిక పౌనఃపున్యం ఏ బిందువుకు ఉన్నదో ఆ విలువను బాహుళకంగా గుర్తించవచ్చును. విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో బాహుళకమును రెండు పద్ధతులద్వారా గుణిస్తారు. 1) పరిశీలన పద్ధతి (Inspetion method) 2) వర్గీకృత పద్ధతి (Grouping method)

పరిశీలన పద్ధతి (Inspection method) : ఈ పద్ధతిలో విచ్ఛిన్న శ్రేణులలోని విలువలను, వాటి పౌనఃపున్యాన్ని పరిశీలించడం ద్వారా బాహుళకాన్ని కనుగొంటారు. అనగా శ్రేణిలో అతిపెద్ద పౌనఃపున్యం ఎక్కడ ఉన్నదో గుర్తించి, దాని కెదురుగా ఉన్న విలువను బాహుళకంగా చెప్పవచ్చును.

ఉదాహరణ : క్రింది దత్తాంశం నుండి 100 మంది కార్మికుల బాహుళకపు వేతనం కనుగొనండి :-

వేతనం రూ.లలో (x)	కార్మికుల సంఖ్య (f)
31	4
32	9
33	12
34	13
35	18
36	14
37	12
38	10
39	5
40	3
	N=100

పై దత్తాంశంలో అతిపెద్ద పౌనఃపున్యం (f) 18. దానికి ఇరువైపులా పౌనఃపున్యం కూడా దట్టంగానే ఉంది. 18కి ఎదురుగా ఉన్న వేతనం రూ. 35లు. కాబట్టి బాహుళకపు వేతనం రూ. 35.

వర్గీకృత పద్ధతి (Grouping Method) : కొన్ని సందర్భాలలో పరిశీలన ద్వారా బాహుళకాన్ని గుర్తించడం కష్టం అవుతుంది. రెండు విలువలు దగ్గర దగ్గరగా ఉంటే, ఒక దానితో ఒకటి పోటీపడుచున్నపుడు పరిశీలన ద్వారా అనగా చూడగానే చెప్పడం అంత తేలికకాదు. అలాంటి సందర్భాలలో బాహుళకాన్ని వర్గీకృత పద్ధతి ద్వారా కనుగొనవలసి ఉంటుంది. ఇందులో ఒక వర్గీకృత పట్టీ మరియు ఒక విశ్లేషణ పట్టీ తయారు చేయవలె. వర్గీకృత పట్టీని తయారు చేయడానికి క్రింది పద్ధతిని అనుసరించవలె.

1. పౌనఃపున్యాలను పరిశీలించి అతి పెద్ద విలువను గుర్తించవలె (1వ వరుస)
2. పౌనఃపున్యాలను రెండు రెండు చొప్పున వర్గీకృతం చేసి, అందులో అతిపెద్ద విలువను గుర్తించవలె. (2వ వరుస)
3. మొదటి పౌనఃపున్యాన్ని వదిలి, మిగిలిన పౌనః పున్యాలను రెండుచొప్పున వర్గీకృతం చేసి, అందులో అతి పెద్ద విలువను గుర్తించవలె. (3వ వరుస)
4. పౌనః పున్యాలను మూడు చొప్పున వర్గీకృతం చేసి, అందులో అతి పెద్ద విలువను గుర్తించవలె. (4వ వరుస)
5. మొదటి పౌనఃపున్యాన్ని వదిలి, మిగిలిన పౌనఃపున్యాలను మూడు చొప్పున వర్గీకృతం చేసి, అందులో హెచ్చు విలువను గుర్తించవలె (5వ వరుస).
6. మొదటి, రెండవ పౌనఃపున్యాన్ని వదిలివేసి మిగిలిన పౌనఃపున్యాలను మూడు చొప్పున వర్గీకృతం చేసి, అందులో హెచ్చు విలువను గుర్తించవలె. (6వ వరుస).

విశ్లేషణ పట్టీ తయారుచేయడం :

1) వర్గీకృత పట్టీనుండి విశ్లేషణ పట్టీని తయారుచేయడానికి క్రింది పద్ధతిని అనుసరించవలె.

1. విలువలను పట్టీలో అడ్డంగా వ్రాయవలె.
2. వరుస సంఖ్యలను పట్టీలో ఎడమ భాగంలో నిలువుగా వ్రాయవలె.
3. వర్గీకృత పట్టీలో గుర్తించిన అతి పెద్ద విలువలను ఆయా వరుస సంఖ్యల కెదురుగా (✓) గుర్తుతో గుర్తించవలె.
4. ఎక్కువ సార్లు వచ్చిన విలువను గుర్తించవలె.
5. దీనినే బాహుళకపు విలువ అంటారు.

ఉదాహరణ : క్రింది దత్తాంశాల నుండి బాహుళకపు వేతనం కనుగొనండి.

దినసరివేతనం రూ॥లలో	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
కార్మికుల సంఖ్య	8	17	20	22	19	14	10	8	5	3

వర్గీకరణ పట్టీ

x	f	2	3	4	5	6
41	8	25		45		
42	17		37		59	
43	20	42				61
44	22		41	55		
45	19	33			43	
46	14		24			32
47	10	18		23		
48	8		13		16	
49	5	8				
50	3					

విశ్లేషణ పట్టీ

S.No.	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1				✓						
2			✓	✓						
3				✓	✓					
4				✓	✓	✓				
5		✓	✓	✓						
6			✓	✓	✓					
Total		1	3	6	3	1	-	-	-	-

44 అనే విలువ ఎక్కువ సార్లు అనగా 6 సార్లు పునరావృతమైనది. కాబట్టి బాహుళకపు వేతనం 44.

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు : వ్యక్తిగత, విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో దత్తాంశాన్ని పరిశీలించడం ద్వారా బాహుళకం లభిస్తుంది. అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో, దత్తాంశాన్ని పరిశీలించడం వలనగాని, వర్గీకృతం చేయటం వలనగాని లభించేవి బాహుళకపు తరగతి మాత్రమే. బాహుళకం కాదు బాహుళకపు తరగతి నుండి బాహుళకం కనుగొనడానికి ఒక సూత్రాన్ని ప్రయోగించవలెను.

అనగా అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో బాహుళకం కనుగొనడానికి క్రింది పద్ధతిని అనుసరించవలె.

1. విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో వలెనే వర్గీకరణ పట్టీని, విశ్లేషణ పట్టీని తయారు చేయవలె.
2. ఎక్కువ సార్లు వునరావృతమైన విలువను బాహుళకపు తరగతి అంటారు.
3. బాహుళకపు తరగతి నుండి బాహుళకం కనుగొనడానికి క్రింది సూత్రాన్ని ప్రయోగించవలె. $Z = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$

Z = బాహుళకం l = బాహుళకపు తరగతి యొక్క దిగువ అవధి f_1= బాహుళకపు తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యం; f_0= బాహుళకపు తరగతికి ముందున్న (Preceeding) తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యం; f_2 = బాహుళకపు తరగతికి తరువాత ఉన్న తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యం i = బాహుళకపు తరగతి అంతరం.

<u>ఉదాహరణ :</u> దిగువ దత్తాంశం నుండి బాహుళకం కనుగొనండి.

మార్కులు :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
విద్యార్థులు :	5	8	9	12	13	17	14	11	8	3

మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య = 100

వర్గీకరణ పట్టీ

x	f	2	3	4	5	6
0-10	5	13				
10-20	8		17	22		
20-30	9	21			29	
30-40	12		25			34
40-50	13	30		42		
50-60	17		31		44	
60-70	14	25				42
70-80	11		19	33		
80-90	8	11			22	
90-100	3					

విశ్లేషణ పట్టీ

వరుస సంఖ్య	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
1						✓				
2					✓	✓				
3						✓	✓			
4				✓	✓	✓				
5					✓	✓	✓			
6						✓	✓	✓		
మొత్తం				1	3	6	3	1		

50-60 తరగతి ఎక్కువసార్లు, అనగా 6 సార్లు పునరావృతం అయింది. కాబట్టి అదే బాహుళకపు తరగతి అవుతుంది. బాహుళకపు తరగతి నుండి బాహుళకం కనుగొనడానికి క్రింది సూత్రాన్ని ప్రయోగించవలె.

$$Z = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

ఇక్కడ $l = 50$, $f_1 = 17$, $f_0 = 13$, $f_2 = 14$, $2 f_1 = 34$, $(2x17)$ $i = 10(60 - 50)$

$$= 50 + \frac{17 - 13}{34 - 13 - 14} \times 10$$

$$= 50 + \frac{4}{7} \times 10 \quad = 50 + \frac{40}{7}$$

$$= 50 + 5.71 = 55.71$$

ఉదాహరణ 4 : క్రింది దత్తాంశం నుండి బాహుళకం కనుగొనండి.

తరగతులు :	1-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99
పౌనఃపున్యం:	14	20	32	64	48	36	20	10	4	2

= మొత్తం పౌనఃపున్యం = 250 (N)

జవాబు : ఇవి అసమగ్ర శ్రేణులు (Inclusive series) అసమగ్ర శ్రేణులనుండి బాహుళకం లెక్కించకూడదు. వీటిని సమగ్ర శ్రేణులుగా (Exclusive series) మార్చిన తరువాత మాత్రమే బాహుళకం లెక్కించవలె. అయితే అన్ని తరగతులను మార్చనవసరం లేదు. ఒక్క బాహుళకపు తరగతిని మాత్రమే మారిస్తే సరిపోతుంది. తరువాత గరిష్ఠ పౌనఃపున్యమునకు ఎదురుగా ఉన్న తరగతిని బాహుళకపు తరగతిగా గుర్తించి దానిని సమగ్రశ్రేణిలోని తరగతిగా మార్చి బాహుళకం లెక్కించవలె.

అనగా అసమగ్రరూపంలో బాహుళకపు తరగతి = 30-39.

దీనిని సమగ్రరూపంగా (Exclusive) మారిస్తే సమగ్రరూపం = 29.5-39.5

బహుళకం = $Z = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$

ఇక్కడ $l = 29.5$, $f_1 = 64$, $f_0 = 32$, $f_2 = 48$, $2 f_2 = 128$, $i = 10$

$$= 29.5 + \frac{64 - 32}{128 - 32 - 48} \times 10$$

$$= 29.5 + \frac{32}{48} \times 10 \quad = 29.5 + \frac{320}{48}$$

$= 29.5 + 6.67$

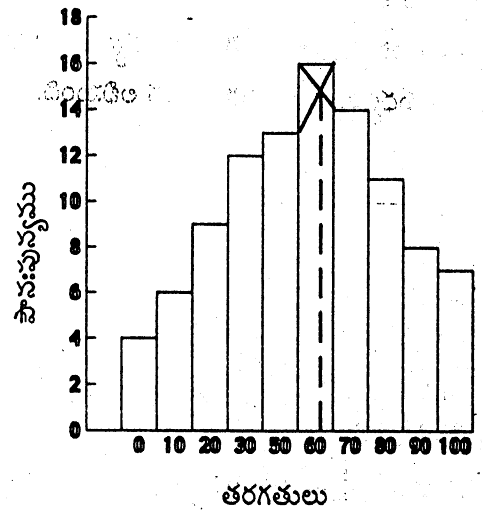
$Z = 36.17$

6.3 రేఖాచిత్రం ద్వారా బాహుళకాన్ని గుర్తించడం :

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులనుండి సోపాన చిత్రం (Histogram) నిర్మించి బాహుళకాన్ని గుర్తించవచ్చును. తరగతులను X అక్షం మీద, పౌనఃపున్యాన్ని Y అక్షం మీద గుర్తించి సోపాన చిత్రము గీయవలె. సోపాన చిత్రంలో అతిఎత్తయిన దీర్ఘ చతురస్రం అంచుల నుండి ఇరువైపులా దీర్ఘచతురస్రముల యొక్క అంచులకు సరళరేఖలు గీయవలె. ఈ రెండు సరళరేఖలు ఎక్కడ ఖండించుకున్నాయో ఆ బిందువునుండి భూమికి (X అక్షానికి) లంబరేఖ గీస్తే బాహుళకం విలువ తెలుస్తుంది.

ఉదాహరణ :- క్రింది దత్తాంశం నుండి సోపాన చిత్రం నిర్మించి బాహుళకం గుర్తించండి.

మార్కులు :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
విద్యార్థులు :	4	6	9	12	13	16	14	11	8	7



Z = 56

స్కేలు = x అక్షం = 1 cm = 10

y అక్షం = 2 cm = 2

6.4 బాహుళకం సుగుణాలు - పరిమితులు :

సుగుణాలు :

1) బాహుళకం, శ్రేణులలో అత్యధిక సార్లు వచ్చే విలువకు ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుంది. కాబట్టి బాహుళకాన్ని మొత్తం దత్తాంశానికి ప్రాతినిధ్య వహించే "మాదిరి విలువ"గా పరిగణిస్తారు.
2) బాహుళకం అంకమధ్యమం వలె చలరాశి అంత్యవిలువకు ప్రభావితం కాదు.
3) బాహుళకాన్ని గుణాత్మక విషయాలను వర్ణించడానికి ఉపయోగించవచ్చు.
4) బాహుళకాన్ని విస్తృత అవధుల విభాజనంలో తరగతి అవధులను కనుక్కోకుండా గణించవచ్చును.
5) బాహుళకాన్ని రేఖాచిత్రం ద్వారా చూపవచ్చును.

పరిమితులు :

1) దత్తాంశపు అన్ని విలువలపై బాహుళకపు గణన ఆధారపడి ఉండదు. దత్తాంశానికి ప్రాతినిధ్యంగా బాహుళకాన్ని తీసుకోవడానికి వీలులేదు.
2) బాహుళకము బీజీయ ప్రస్తావనకు అనువుగా ఉండదు.
3) వర్గీకరణ పట్టీ, విశ్లేషణ పట్టీలు తయారుచేయడం శ్రమతో కూడుకున్న పని, అందుచేత బాహుళకం లెక్కించడం అంత సులభం కాదు.

4) పరిశీలన ద్వారా లెక్కించే బాహుళకం ఖచ్చితమైన, సూటియైన విలువను ఇవ్వదు. ఈ విలువ పాఠకులను తప్పుదోవ పట్టిస్తుంది.

5) రేఖాపటం ద్వారా గుర్తించిన బాహుళకం అంచనా విలువను ఇవ్వవచ్చు. అదిఎల్లప్పుడూ ఖచ్చితమైన విలువను ఇవ్వలేదు.

6.5 గుణమధ్యమము - హరమధ్యమం (Geometric Mean - Harmonic Mean)

ఈ పాఠ్యాంశంలో దత్తాంశాన్ని రెండు విధాలైన మార్పులకు గురిచేస్తాం.

1) సంవర్గమానాలు తీసుకొని అంకమధ్యమం కనుగొనుట, ప్రతిసంవర్గమానం తీసుకొనుట

2) వ్యుత్క్రమాలు తీసుకొని అంకమధ్యమం కనుగొనుట, తరువాత మరల వ్యుత్క్రమం తీసుకొనుట. మొదటి సందర్భంలో వచ్చే కొలతను గుణమధ్యమం అని, రెండవ సందర్భంలో వచ్చే కొలతను హరమధ్యమం అని అంటారు.

6.6. గుణమధ్యమము : (Geometric mean) (G.M)

"ఇచ్చిన సంఖ్యల సమితిలో $X_1, X_2, X_3 - X_n$ వాటి లబ్ధాలకు Nవ వర్గమూలమును గుణమధ్యమం అంటారు అని ఫ్రూండ్ & విలియమ్స్ (Freund and William) నిర్వచించినారు. అంకమధ్యమం వలెనే గుణమధ్యం కూడా గణన చేసినటువంటి సగటు. అయితే అంకమధ్యమం కూడి, భాగించడం వలన వస్తుంది. గుణమధ్యమం గుణించడం వలన లభిస్తుంది.

సాంకేతికంగా

$$\text{గుణమధ్యమం} = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n}$$

ఇక్కడ $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ అనేవి దత్తాంశంలోని వివిధ విలువలు.

గుణమధ్యమం గణన చేసేటపుడు విలువల సంఖ్య రెండూ లేదా మూడు అయితే, వర్గమూలం, ఘనమూలం కనుగొనవచ్చు. కాని విలువలు ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు మూలం లెక్కించడం కష్టమవుతుంది. అందువల్ల గుణమధ్యమాన్ని సాధారణంగా సంవర్గమానాల (Logarithms) సహాయంతో గణన చేస్తారు. అంశాలలో ఏ ఒక్క అంశమైన "0" (Zero) అయితే గుణమధ్యమం విలువ కూడా సున్నా అవుతుంది. అని గమనించవలె. సంవర్గమానాలను ఉపయోగించిన తరువాత, పై సూత్రాలన్ని ఈ విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$\text{గుణమధ్యమం} = \text{Antilog of } \frac{\Sigma \log x}{N}$$

వ్యక్తిగత శ్రేణులు : వ్యక్తిగత శ్రేణుల నుండి గుణమధ్యమాన్ని కనుగొనడానికి క్రింది పద్ధతిని అనుసరించవలెను.

1) అంశాలన్నింటికి సంవర్గమానాలను కనుగొనవలె (log x)

2) సంవర్గమానాలను కూడవలె ($\Sigma \log x$)

3) కూడగా వచ్చిన మొత్తాన్ని అంశాల సంఖ్యతో భాగించవలె (N చేత)

4) భాగించగా వచ్చిన దానికి ప్రతి సంవర్గమానం తీసకుంటే అది గుణమధ్యమం అవుతుంది.

$$\text{సాంకేతికంగా G.M} = \text{Antilog of } \frac{\Sigma \log x}{N}$$

<u>ఉదాహరణ : 1</u> క్రింది దత్తాంశం నుండి గుణమధ్యమం కనుగొనండి.

అంశాలు :- 3, 12, 76, 115, 6, 9, 10, 100, 476, 96

జవాబు :

వరుస సంఖ్య	x	logx
1	3	0.4771
2	12	1.0792
3	76	1.8808
4	115	2.0607
5	6	0.7782
6	9	1.9542
7	10	1.0000
8	100	2.0000
9	476	2.6776
10	96	1.9823
N:10		Σlogx = 14.8901

గుణమధ్యమం GM = Antilog of $\frac{\Sigma \log x}{N}$

= Antilog of $\frac{14.8901}{10}$

Antilog of 1.48901

గుణమధ్యమం = 30.83

ఉదాహరణ 2 : క్రింది దత్తాంశానికి గుణమధ్యమం విలువ కనుగొనండి.

పరిమాణం : 235, 12, 2,0.2, 0.68, 0.786, 0.6789, 0.05, 0.057, 0.0678, 0.005, 0.00892, 0.0008, 0.6257, 0.0012

S.No.	x	log x
1	235	2.3711
2	12	1.0792
3	2	0.3010
4	0.2	$\bar{1}.3010$
5	0.68	$\bar{1}.8325$
6	0.786	$\bar{1}.8954$
7	0.6789	$\bar{1}.8318$
8	0.05	$\bar{2}.6990$
9	0.057	$\bar{2}.7559$
10	0.0678	$\bar{2}.8312$
11	0.005	$\bar{3}.6990$
12	0.0089	$\bar{3}.9494$
13	0.0008	$\bar{4}.9031$
14	0.6257	$\bar{1}.7964$
15	0.0012	$\bar{3}.0792$
N=15		Σlogx = $\overline{12}.3252$

గుణమధ్యమం = Anti log of $\frac{\Sigma \log x}{N}$

Σ logx = 12.3252 కాబట్టి పూర్ణాంక భాగపు (Characteristic) విలువ ఋణాత్మకం అయితే మాంటిస్సా విలువధనాత్మకం. అందుచేత పూర్ణాంక భాగం, మాంటిస్సావిలువ 15తో కలిపి భాగించడానికి వీలుపడదు. అందుచేత పూర్ణాంకభాగాన్ని, భాగించే సంఖ్యచేత సరిగ్గా భాగించబడేటట్లు సరిచేసుకొని అంటే ఎంత విలువ అవసరం అవుతుందో అంత ఋణాత్మక విలువను కలిపి, అంతే విలువను ధనాత్మక విలువతో మాంటిస్సాకు కలిపి భాగించవలె. ఇప్పుడు ఇక్కడ $\overline{12}$ కు $\bar{3}$ కలిపితే 15తో భాగించడానికి వీలుకలుగుతుంది. పూర్ణాంక భాగానికి కలిపిన ప్రభావాన్ని సమానం చేయడానికి మాంటిస్సాకు కూడా 3 కలపవలె.

సూత్రంలో విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే; గుణమధ్యమం = Anitlog of log of

$\frac{\overline{15} + 3.3252}{15}$ = Anitlog of $\bar{1}.2217$

= 0.1666.

విచ్ఛిన్న శ్రేణులు : విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో గుణమధ్యమం లెక్కించడానికి క్రింది పద్ధతిని అనుసరించవలె.

1) X విలువలకు సంవర్గమానాలను కనుగొనవలె (log x)
2) log X ను అనగా సంవర్గమానాలను ఆయా పౌనః పున్యాలతో గుణించి, వాటి మొత్తాన్ని కనుగొనవలె (Σ log x X f)
3) (Σlog x X f) ను పౌనఃపున్యాల మొత్తంతో (N) భాగించి ప్రతి సంవర్గమానం (Antilog) కనుగొనవలె. దీనినే గుణమధ్యమం అంటారు.

సాంకేతికంగా గుణమధ్యమం = G.M = Antilog of $\frac{\Sigma \log x \ X \ f}{N}$

ఉదాహరణ 3 : 50 మంది కార్మికుల రోజువారి వేతనం రూ.లో క్రింది విధంగా ఉంది. వాటి నుండి వేతనాల గుణమధ్యమం కనుగొనండి.

వేతనాల రూ.లో:-	31	32	33	34	35	36	37	38
కార్మికుల సంఖ్య :-	5	7	8	13	9	4	3	1

జవాబు

x	f	log x	log x X f
31	5	1.4914	7.4570
32	7	1.5052	12.5364
33	8	1.5185	12.1480
34	13	1.5315	19.9095
35	9	1.5450	13.9050
36	4	1.5563	6.2252
37	3	1.5682	4.7046
38	1	1.5798	1.5798
	N=50		76.4655

గుణమధ్యమం = G.M = Anti log of $\frac{\Sigma \log x \ X \ f}{N}$

ఇక్కడ $\Sigma \log x \ X \ f$ = 76.4655

= Anti log of $\frac{76.4655}{50}$

Anti log of 1.52931 గుణమధ్యమం = 33.83

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు : అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో గుణమధ్యమం కనుగొనడానికి క్రింది పద్ధతిని అనుసరించవలె.

1) తరగతుల మధ్య విలువలు కనుగొనవలె (x)

2) మధ్య విలువలకు సంవర్గమానాలు కనుగొనవలె (log x)

3) సంవర్గమానాలను వాటి పౌనఃపున్యంతో హెచ్చించి (log x X f) వాటి మొత్తం విలువను కనుగొనవలె (Σ log x X f)

4) Σ log x X f విలువను పౌనఃపున్యాల మొత్తంతో (N) భాగించి ప్రతి సంవర్గమానం కనుగొనవలె. దీనినే గుణమధ్యమం విలువ అంటారు.

సాంకేతికంగా గుణమధ్యమం = Anti log of $\frac{\Sigma \log x \ X \ f}{N}$

ఉదాహరణ 4 :- క్రింది దత్తాంశం నుండి గుణమధ్యమం కనుగొనండి

తరగతులు :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
పౌనఃపున్యము :	4	8	9	13	7	6	3

జవాబులు :

x	f	mv	log x (mv)	log x xf
0-10	4	5	0.6990	2.7960
10-20	8	15	1.1761	9.4088
20-30	9	25	1.3976	12.5811
30-40	13	35	1.5450	20.0850
40-50	7	45	1.6532	11.5724
50-60	6	55	1.7404	10.4424
60-70	3	65	1.8129	5.4387
	N = 50			72.3244

గుణమధ్యమం = G.M = Anti log of $\frac{\Sigma \log x \ X \ f}{N}$

= Anti log of $\frac{72.3244}{50}$

= Anti log of 1.446488

గుణమధ్యమం = 27.957

6.7 గుణమధ్యమం - సుగుణాలు - పరిమితులు

సుగుణాలు :

1) గుణ మధ్యమాన్ని దత్తాంశ శ్రేణికి ఒక ప్రాతినిధ్య విలువగా పరిగణిస్తారు. ఎందుకంటే గుణమధ్యమం గణన శ్రేణిలోని ప్రతి అంశం మీద ఆధారపడి ఉంది, శ్రేణులలో ఏ ఒక్క అంశం లోపించినా దీని గణన సాధ్యం కాదు.

2) సగటుకు ఉండవలసిన లక్షణాలు గుణమధ్యములో చాలా ఉన్నాయి. కాబట్టి ఇది స్పష్టంగా నిర్వచించబడిన కేంద్రస్థానం కొలత.

3) గుణమధ్యమం బీజీయ ప్రస్తావనకు సరిపోతుంది.

4) పౌనఃపున్య విభాజనంలోని మార్పుశాతాలు, నిష్పత్తులను సగటు చేయడంలోను, పెరుగుదల లేదా తరుగుదల గణన చేయడంలోను గుణమధ్యమం పనికివస్తుంది.

పరిమితులు:

1) గుణమధ్యమం గణన కష్టం. ముఖ్యంగా అంశాలు ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు.

2) శ్రేణిలో ఋణాత్మక విలువలుగాని, సున్నాగాని ఉంటే ఇది నిర్వచింపబడదు.

3) శ్రేణిలోని అంశాలకు లెక్కించిన గుణమధ్యమం విలువకు సంబంధం ఉండదు.

4) ఆర్థిక సమస్యల విశ్లేషణకు గుణమధ్యమం ఉపయోగకరం కాదు.

6.8 హర మధ్యమం (Harmonic Mean)

దత్తాంశంలోని వ్యక్తిగత విలువల వ్యుత్క్రమాన్ని కనుగొని వాటికి అంకమధ్యమాన్ని కనుగొని, ఆ అంకమధ్యమానికి తిరిగి వ్యుత్క్రమాన్ని కనుగొంటే అది హరమధ్యమమవుతుంది.

"దత్తాంశములోని విలువల యొక్క వ్యుత్క్రమాల (Reciprocals) అంకమధ్యమానికిగల వ్యుత్క్రమము హరమధ్యమానికి సమానము'' అనే భావనను ఇచ్చే నిర్వచనాన్ని హరమధ్యమానికి యూల్, కెండాల్ మహాశయులు ఇచ్చినారు.

హరమధ్యమాన్ని ఇలా కూడా నిర్వచించవచ్చు; "చలనాల మొత్తం సంఖ్యను చలనాల వ్యుత్క్రమాల మొత్తంతో భాగించగా వచ్చే ఫలితము హరమధ్యమం".

<u>వ్యక్తిగతశ్రేణులు:</u>

వ్యక్తిగత శ్రేణులలొ హరమధ్యమం లెక్కించడానికి క్రింది పద్ధతిని అనుసరించవలె.

1) విలువలకు అనగా x కు వ్యుత్క్రమాలు కనుగొనవలె $\left(\frac{1}{x}\right)$

2) వ్యుత్క్రమాల మొత్తమును కనుగొనవలె. $\left(\Sigma\frac{1}{x}\right)$ =

3) విలువల సంఖ్యను (N) వ్యుత్క్రమాల మొత్తం చేత భాగించవలె. దానినే హరమధ్యమం అంటారు.

సాంకేతికంగా H.M హరమధ్యమం = $\dfrac{N}{\Sigma\frac{1}{x}}$

N = అంశాల సంఖ్య; $\Sigma\frac{1}{x}$ = అంశాలు వ్యుత్క్రమాల మొత్తము.

ఉదాహరణ 5 :- హరమధ్యమం కనుగొనండి.

విలువలు :- 5, 25, 48, 76, 115, 431, 576, 7, 2, 1215, 6743, 3333,

జవాబు :

x	1/x (వ్యుత్క్రమాలు)
5	0.2000
25	0.0400
48	0.0208
76	0.0132
115	0.0087
431	0.0023
576	0.0017
7	0.1429
2	0.5000
1215	0.0008
6743	0.0001
3333	0.0003
N=12	Σ1/x = 0.9308

$$\text{హరమధ్యమం} = \frac{N}{\Sigma \frac{1}{x}} = \frac{12}{0.9398}$$

$$\text{హరమధ్యమం} = 12.9$$

ఉదాహరణ 6 :- హరమధ్యమం కనుగొనండి.

చలనాలు : 0.5, 0.56, 0.1, 0.05, 0.056; 0.01; 0.005; 0.00056, 0.0011, 0.0005; 0.0001; 0.5678, 0.678; 0.670; 6.753;

జవాబు :-

x	1/x
0.5	2.0000
0.56	1.7857
0.1	10.0000
0.05	20.0000
0.056	17.8571
0.01	100.0000
0.005	200.0000
0.00056	178.5714
0.0011	1000.0000
0.0005	2000.0000
0.0001	10000.0000
0.5678	1.7612
0.678	1.4742
0.670	1.4925
6.753	0.1481
N = 15	l/x = 13535.0909

$$\text{హరమధ్యమం} = \frac{N}{\Sigma \frac{1}{x}} = \frac{15}{13535.0909}$$

$$N = 15 \qquad = 0.0011$$

విచ్ఛిన్న శ్రేణులు : విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో హరమధ్యమాన్ని లెక్కించడానికి క్రింది పద్ధతిని అనుసరించవలె.

విలువలకు వ్యుత్క్రమాలు (Reciprocals) లెక్కించవలె (1/x)

2) వ్యుత్క్రమాలను వాటి పౌనఃపున్యాలతో హెచ్చించవలె $\left(\frac{1}{x} \text{ x f}\right)$

3) వ్యుత్క్రమాలను పౌనఃపున్యాలతో హెచ్చించగా వచ్చిన లబ్ధాలమొత్తం (Σ 1/x X f) చేత, పౌనఃపున్యాల మొత్తాన్ని భాగించవలె. వచ్చిన ఫలితాన్ని హరమధ్యమం అంటారు.

ఉదాహరణ 7 :- హరమధ్యమం కనుగొనండి.

x :	10	15	20	25	30	35	40
f :	5	8	12	13	9	2	1

జవాబు :

x	f	1/x	1/x X f
10	5	0.10000	0.50000
15	8	0.0667	0.5336
20	12	0.0500	0.60000
25	13	0.0400	0.5200
30	9	0.0333	0.2997
35	2	0.0286	0.0572
40	1	0.0250	0.0250
	N = 50		Σ1/x X f = 2.5355

హరమధ్యమం; $HM = \frac{N}{\Sigma\left(\frac{1}{x} \text{ x f}\right)}$

$= \frac{50}{2.5355} = 19.72$

అవిచ్ఛిన్నశ్రేణులు :

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో హరమధ్యమం కనుగొనడానికి క్రింది పద్ధతిని అనుసరించవలె.

1) తరగతుల మధ్య విలువలకు వ్యుత్క్రమాలు కనుగొనవలె $\left(\frac{1}{x}\right)$

2) వ్యుత్క్రమాలను వాటి పౌనఃపున్యంతో హెచ్చించవలె $\left(\frac{1}{x} \text{ x f}\right)$

3) వ్యుత్క్రమాలను, పౌనఃపున్యంతో హెచ్చించగా వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తము $\left(\Sigma\frac{1}{x} \text{ x f}\right)$ చేత పౌనఃపున్యపు మొత్తం చేత (N) భాగించవలె. దీనినే హరమధ్యమం అంటారు.

సాంకేతికంగా $HM = \frac{N}{\Sigma\left(\frac{1}{x} \text{ x f}\right)}$

ఉదాహరణ 8 :- హరమధ్యమం గణన చేయండి

తరగతులు :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
పౌనపున్యం :	8	12	13	15	17	16	14	5

జవాబు :

x	f	MV	1/x	1/x X f
0-10	8	5	0.20000	1.0000
10-20	12	15	0.0667	1.0005
20-30	13	25	0.0400	1.0000
30-40	15	35	0.0286	1.0010
40-50	17	45	0.0222	0.9990
50-60	16	55	0.0182	1.0010
60-70	14	65	0.0154	0.8645
70-80	5	75	0.0133	0.9975
	N = 100		Σ(1/x X f)	7.8635

$$\text{హరమధ్యమం} = \frac{N}{\Sigma \frac{1}{x} \times f} = \frac{100}{7.8635}$$

$$= 12.72$$

6.10 హరమధ్యమం సుగుణాలు - పరిమితులు :

సుగుణాలు : స్పష్టంగా నిర్వచించవచ్చు. వ్యుత్క్రమాల ద్వారా గణించబడింది, కాబట్టి దత్తాంశంలో పెద్ద విలువలకు తక్కువ ప్రాధాన్యం ఉంటుంది. సాపేక్షిక మార్పులను కుదింపుచేస్తుంది. వేగముల సగటు గణనలో ఉపయోగపడుతుంది.

పరిమితులు : గణన చేయడం కష్టతరము. విశ్లేషణకు అనువుగా ఉండదు. దత్తాంశంలో ఏదైనా విలువ సున్నా అయితే ఇది నిర్వచింపబడదు.

6.11 సారాంశం :

బాహుళకం కూడా స్థానాన్ని బట్టి లెక్కించే సగటు. విలువలు ఎక్కడ ఎక్కువగా గుమిగూడి ఉన్నాయో, విలువల సాంద్రత ఎక్కడ ఎక్కువగా ఉన్నదో దానిని "బాహుళకం" అంటారు. దీనినే మోడల్ విలువ అని కూడా అంటారు. మళ్ళీ మళ్ళీ పునరావృతమయ్యే విలువను బాహుళకం అంటారు. బాహుళకాన్ని సోపాన చిత్రంద్వారా (Histogram) ద్వారా చూపించవచ్చును.

ఇచ్చిన సంఖ్యల సమితిలో X_1, X_2, X_3, ...X_n, వాటి లబ్దాలకు N వ వర్గమూలమును గుణమధ్యమం అంటారు. ఇది అంకమధ్యమం వలెనే గణన చేసిన సగటు. గుణ మధ్యమాన్ని దత్తాంశ శ్రేణికి ఒక ప్రాతినిధ్య విలువగా పరిగణిస్తారు.

చలనాల మొత్తం సంఖ్యను చలనాల వ్యుత్క్రమాల మొత్తంతో భాగించగా వచ్చే ఫలితాన్ని హరమధ్యమం అంటారు. సగటు వేగం లెక్కించడానికి ఇది ఉపయోగపడుతుంది.

6.12 ప్రశ్నలు :

1) బాహుళకం అనగా నేమి?

2) బాహుళకం సుగుణాలు, పరిమితులను వివరించండి.

3) గుణమధ్యమాన్ని నిర్వచించండి. గుణమధ్యమం ధర్మాలను వివరించండి.

4) గుణమధ్యమం సుగుణాలను, పరిమితులను వివరించండి.

5) హరమధ్యమమును నిర్వచించండి?

6) హరమధ్యమం సుగుణాలను, పరిమితులను వివరించండి.

అభ్యాసాలు

1) బాహుళకం, లెక్కించండి.

49, 35, 21, 46, 57, 67, 57, 13, 91

2) బాహుళకం గననచేయండి.

పిల్లల సంఖ్య :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
కుటుంబాల సంఖ్య :	5	8	9	12	13	16	14	11	8	5	3

3) బాహుళకం కనుగొనండి.

పరిమాణం :	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
పౌనఃపున్యం :	15	20	35	25	18	17	14	10	25	35

4) బాహుళకం గణన చేయండి.

మార్కులు :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
విద్యార్థుల సంఖ్య :	5	8	12	13	17	18	6	15	12	6

5) బాహుళకం వలన లభించే లాభాలేవి? క్రింది వివరాల నుండి బాహుళకం కనుగొనుము.

పరిమాణం :	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
పౌనఃపున్యం :	1	2	5	14	10	9	2

6) దిగువ పట్టీనుండి బాహుళకము కనుగొనండి.

హాజరు కానిరోజులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
5 కంటే తక్కువ	29
10 కంటే తక్కువ	224
15 కంటే తక్కువ	465
20 కంటే తక్కువ	582
25 కంటే తక్కువ	634
30 కంటే తక్కువ	644
35 కంటే తక్కువ	650
40 కంటే తక్కువ	653
45 కంటే తక్కువ	655

7) దిగువ దత్తాంశమునకు బాహుళకము గణన చేయుము.

బరువు (గ్రాములలో)	410-419	420-429	430-439	440-449	450-459	460-469	470-479
ఆపిల్ పండ్ల సంఖ్య	14	20	42	54	45	18	7

8) క్రింది దత్తాంశం నుండి బాహుళకము విలువ కనుగొనండి.

ఆదాయం (రూ)	వ్యక్తుల సంఖ్య
10 కంటే ఎక్కువ	72
20 కంటే ఎక్కువ	67
30 కంటే ఎక్కువ	59
40 కంటే ఎక్కువ	50
50 కంటే ఎక్కువ	36
60 కంటే ఎక్కువ	21
70 కంటే ఎక్కువ	9
80 కంటే ఎక్కువ	3

9) 150 విద్యుత్ దీపాల జీవితకాలం క్రింది పట్టీలో ఇవ్వబడింది. రేఖా చిత్రం ద్వారా బాహుళకము కనుగొనుము.

జీవితకాలం (గంటలలో)	0-400	400-800	800-1200	1200-1600	1600-2000	2000-2400	2400-2800	2800-3200
దీపాల సంఖ్య	4	12	40	41	27	13	9	4

10) దిగువ ఇచ్చిన విభాజనంలో ఒక కళాశాలకు చెందిన 60 మంది విద్యార్థుల బరువులు ఇవ్వబడినాయి.

బరువు (కి.గ్రా) :	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59	60-64
విద్యార్థుల సంఖ్య :	3	5	12	18	14	6	2

ఈ విభాజనానికి సోపాన చిత్రాన్ని గీచి, బాహుళకపు విలువను కనుగొనండి.

11) దిగువ దత్తాంశమును సోపాన చిత్రం ద్వారా చూపుము మరియు బాహుళకమును గుర్తించుము.

వేతనాలు (రూ.)	10-15	15-20	20-25	25-30	30-40	40-60	60-80
కార్మికుల సంఖ్య	7	19	27	15	12	12	8

12) గుణమధ్యమం కనుగొనండి.

మార్కులు : 13, 17.3, 76, 10, 85, 12, 27, 45, 59, 67, 35

13. గుణమధ్యమం కనుగొనండి.

అంశాలు : 2.5; 7.21; 12.85; 135.1; 756.49; 1274.59; 7561.488; 6755.005; 3000.51; 48085.541

14) గుణమధ్యమం కనుగొనండి.

x : 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50

f :- 4, 7, 9, 13, 15, 17, 16, 12, 4, 3

15) హరమధ్యమం కనుగొనండి.

X : 2, 3, 5, 12, 8, 75, 85, 91, 42, 9, 50, 33, 115, 475, 500

16) హారమధ్యమం కనుగొనండి.

X : 5.2; 6.3; 12.75; 14.91; 10.01; 9.756, 256.49, 439.925, 8675.2915, 1000.1111

17. హరమధ్యమం గణన చేయండి.

x :	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
f :	3	7	8	12	21	15	14	9	7	4

18) హారమధ్యమం కనుగొనండి.

తరగతులు :	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79
పౌనఃపున్యం :	8	12	13	19	21	17	16	14

19. గుణమధ్యమం కనుగొనండి?

చలనాలు : 0.6754; 0.00053; 0.0005; 0.0506; 0.0070; 0.0100; 0.2345, 0.6285; 0.1759; 0.9369, 0.4809; 0.8554.

పాఠం - 7

విచరణ మానాలు లేదా విస్తరణ మానాలు

(Measures Variation or Measures of Dispersion)

ఉద్దేశ్యం (Objective) : ఈ పాఠ్యాంశం చదవడంవలన మీరు

1) విచరణ మానాల అర్థం, నిర్వచనం, ఉద్దేశ్యాలు

2) విచరణ మానాలు గణన చేయడం

3) విచరణ మానాలయొక్క ప్రయోజనాలు, లోపాలు సవరించి క్షుణ్ణంగా అధ్యయనం చేయగలరు.

నిర్మాణం : (Structure)

7. 1. విచరణ మానాల అర్థం, నిర్వచనం.

7. 2. విచరణ మానాల ఉద్దేశ్యాలు

7. 3. వివిధరకాల విచరణ మానాలు

7. 4. వ్యాప్తి - గణనచేయడం

7. 5. చతుర్థాంశ విచలనం - గణన చేయడం

7. 6. మాధ్యమ విచలనం - గణన చేయడం

7. 7. ప్రామాణిక విచలనం - గణన చేయడం

7. 8. విచరణ గుణకం

7. 9. సారాంశం

7. 10. ప్రశ్నలు

7. 11. అభ్యాసాలు

7. 1. విచరణ లేదా విస్తరణ మానాల అర్థము నిర్వచనం

క్రేంద్రస్థాన కొలతలైన సగటులు, శ్రేణిని ప్రాతినిధ్యం వహించే ఒకేఒక అంకెను తెలియజేస్తాయి. కాని ఈ సంఖ్యవలన, శ్రేణిలోని అన్ని సంఖ్యలు ఏ రకంగా విస్తరించబడినవీ, క్షేంద్రస్థానం చుట్టూ ఏ రకంగా వ్యాపించబడినవో తెలియదు. ఇది తెలియకపోతే వివిధ శ్రేణులను పోల్చి అర్థవంతమైన విశ్లేషణ చేయడానికి వీలుండదు.

దత్తాంశంలోని విలువలు కేంద్రస్థానం చుట్టూ ఏ రకంగా విస్తరించి యున్నవో తెలిపేదానిని "విస్తరణా కొలత" లేదా "విచరణ మానం" (Measuer of Dispersion or Measure of Variation) అంటారు. కేంద్రస్థాన విలువకు అసలు విభాజనంలోగల అంశాలకు ఉన్నతేడాను లేదా విచరణను (Variation) తెలుసుకొనే మానాన్నే (Measure) "విచరణ మానం లేదా విస్తరణ (Dispersion) అంటారు" (The Measure of Variation is a measure of the degree to which the items included in the original distribution depart or vary from the central value) అని "మిల్స్" మహాశయుడు నిర్వచించినాడు.

పౌనఃపున్య విభాజనాలన్నీ ఒకేవిధంగా ఉండడం అరుదు. ఒక్కొక్కప్పుడు వాటిలో ఒకదానితో ఒకటి పోల్చవలసిన అవసరం వచ్చినపుడు కేంద్రస్థానపు విలువలు లేదా ప్రథమ శ్రేణి సగటులు (A verages of the first order) తప్పుదారిని పట్టించేవిగా ఉంటాయి. అటువంటప్పుడు కేంద్రస్థాన విలువలకు విభాజనంలో గల అంశాలకు తేడాలు తెలుసుకొని తద్వారా విభాజనం యొక్క స్వరూపం తెలుసుకోవడం

ఎంతైనా అవసరం. ఈ పద్ధతినే విస్తరణ (Dispersion) తెలుసుకోవడం అంటారు. వీటిని ద్వితీయ శ్రేణి సగటులు (Averages of second order) అని కూడా అంటారు. విస్తరణ ఎంత తక్కువగా ఉంటే సగటు ప్రాతినిధ్యం అంత ఎక్కువగా ఉంటుంది. విస్తరణనే విచరణము (Variation) లేదా విస్తృతి (Scatter) అనికూడా అంటారు.

విచరణ మానం ఉద్దేశ్యాలు (Objectives of Measures of Variation) :

ఈ క్రింది ప్రధాన ఉద్దేశ్యాలు సాధించడానికి విచరణ మానాలు ఉపయోగపడతాయి.

1) సగటు యొక్క విశ్వసనీయతను తెలుసుకోవడానికి - సగటు విలువలకు లేదా చలనాలకు ఎంతవరకు ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుందో విచరణ మానాల ద్వారా తెలుసుకోవచ్చును. విస్తరణ తక్కువైతే సగటు వ్యక్తిగత విలువలకు చాలా సన్నిహితమైన ప్రాధాన్యం వహిస్తుంది. అప్పుడు దానిని విశ్వసించవచ్చును. ఒకవేళ విస్తరణ ఎక్కువైతే సగటు విలువలకు దూరమై అంతగా విశ్వసించదగినదిగా ఉండదు.

2) విచరణత్వాన్ని అదుపులో ఉంచడానికి ఆధారంగా ఇది పనిచేస్తుంది. ఆరోగ్య విషయాలలో అనగా ఉష్ణోగ్రత, రక్తపోటు లలో అధిక విచరణం కనిపించినపుడు అదుపులో ఉంచడానికి ప్రయత్నించబడుతుంది. అలాగే ఉత్పత్తిలో, ఇంజనీరింగ్ సమస్యలలో విస్తరణ మానం ఆధారంగా విస్తృతానికి గల కారణాలను అదుపులో ఉంచుతారు.

3) విచరణత్వాన్ని అనుసరించి రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ శ్రేణులను పోల్చడానికి విస్తరణ ఉపయోగపడుతుంది. ఒక విషయం గురించి తీసుకున్న దత్తాంశంలో స్థిరత్వం ఉన్నదా లేదా అనే విషయం దీనివలన తెలుసుకోవచ్చును.

ఏ ధర్మాలైతే మంచి సగటుకు అవసరమో అవే ధర్మాలు మంచివిచరణ మానాలకు కూడా అవసరం.

7. 3. విచరణ మానాలలో రకాలు :

విచరణ మానాలలో ప్రధానమైనవి నాలుగు అవి

1) వ్యాప్తి (Range)

2) చతుర్థాంశ విచలనం (Semi - Inter Quartile Range or Quartile Deviation)

3) మాధ్యమ విచలనం (Mean Deviation)

4) క్రమ లేదా ప్రామాణిక విచలనం (Standard Deviation)

7. 4. వ్యాప్తి (Range) :

విస్తరణ మానాలన్నింటిలో వ్యాప్తి చాలా తేలికైనది. దత్తాంశంలోగల "అత్యధిక, అత్యల్ప విలువల తేడాను వ్యాప్తి" గా యూల్, కెండాల్ మహాశయులు నిర్వచించినారు. (Range is difined as the "difference between the greatest and the least values" Yule, Kendall)

రెండు విభాజనాల సగటులు ఒకేరకంగా ఉంటే వాటి వ్యాప్తులను పోల్చి నిర్ణయాలు చేయవచ్చును. ఉదా :- ఒక కర్మాగారంలో పనిచేసే కూలీ వేతనాలు వారంలో రూ. 75, 64, 70, 80, 84, 69 అయితే వాని రాబడి వ్యాప్తి 20 (84-64) అవుతుంది. అంటే అత్యధిక వేతనాలు రూ. 84 నుండి అతి స్వల్ప వేతనాలు రూ. 64 తీసివేస్తే వచ్చే రూ. 20 లను వ్యాప్తి అంటారు.

వ్యక్తిగతశ్రేణులు - వ్యాప్తి : అతిపెద్ద విలువ అతిచిన్న విలువల మధ్యగల తేడాను వ్యాప్తి అంటారు.

ఉదా : 10 మంది విద్యార్థుల మార్కులు ఇలా ఉన్నాయి.

మార్కులు : 35, 62, 71, 52, 67, 84, 21, 12, 3, 95

6) జవాబు : వ్యాప్తి = అత్యధిక విలువ - అత్యల్ప విలువ

అత్యధిక మార్కులు = 95, అత్యల్ప మార్కులు = 3

వ్యాప్తి = 95 - 3 = 92

వ్యాప్తిగుణకము (Coefficient of Range) :- అత్యధిక, అత్యల్ప విలువల తేడాను, వాటిని కూడగా వచ్చిన మొత్తంలో భాగించగా వచ్చే విలువను గుణకము అంటారు.

$$\text{వ్యాప్తి గుణకము} = \frac{\text{అత్యధిక విలువ - అత్యల్ప విలువ}}{\text{అత్యధిక విలువ + అత్యల్ప విలువ}}$$

$$= \frac{95-3}{95+3} \quad = \frac{92}{98} = 0.93877$$

విచ్ఛిన్న శ్రేణులు - వ్యాప్తి : విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో కూడా అత్యధిక అత్యల్ప విలువల మధ్యగల వ్యత్యాసాన్ని వ్యాప్తి అంటారు. అత్యధిక, అత్యల్ప విలువలను చలనాలలో పరిశీలించవలె. పౌనః పున్యంతో సంబంధం లేదు.

ఉదా 2) వ్యాప్తిని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి.

మార్కులు	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
విద్యార్థుల సంఖ్య	4	6	12	13	18	16	14	9	5	2

జవాబు : అత్యధిక మార్కులు 10; అత్యల్ప మార్కులు 1;

వ్యాప్తి = అత్యధిక విలువ - అత్యల్ప విలువ

= 10 - 1 = 9

$$\text{వ్యాప్తి గుణకం} = \frac{\text{అత్యధిక విలువ - అత్యల్ప విలువ}}{\text{అత్యధిక విలువ + అత్యల్ప విలువ}}$$

$$= \frac{10-1}{10+1} = \frac{9}{11} = 0.818$$

పౌనఃపున్య విభాజనంగా ఏర్పరచిన విచ్ఛిన్న శ్రేణి యొక్క వ్యాప్తిని లెక్కించుటకు పౌనః పున్యాలు అవసరం లేదని, కేవలం చలరాశి యొక్క గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు చాలునని గమనించవలె.

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు - వ్యాప్తి :- అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో వ్యాప్తి గణన చేయడానికి అతిస్వల్పమైన తరగతి దిగువ అవధి అత్యధికమైన తరగతి ఎగువ అవధిని తీసుకొనవలెను.

ఉదా : 3) దిగువపట్టిలో విద్యార్థుల మార్కులు ఇవ్వబడ్డాయి.

తరగతి :	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
విద్యార్థులు :	5	8	14	23	7	3

పై దత్తాంశం నుంచి వ్యాప్తిని, వ్యాప్తి గుణకాన్ని కనుక్కోండి.

జవాబు : గరిష్ట ఎగువ అవధి = 40

కనిష్ట దిగువ అవధి = 10

వ్యాప్తి = అత్యధిక విలువ - అత్యల్ప విలువ

= 40 - 10

= 30

$$\text{వ్యాప్తి గుణకము} = \frac{\text{అత్యధిక విలువ - అత్యల్ప విలువ}}{\text{అత్యధిక విలువ + అత్యల్ప విలువ}}$$

$$= \frac{40-10}{40+10} = \frac{30}{50} = 0.6$$

వ్యాప్తి ప్రయోజనాలు - లోపాలు : వ్యాప్తి గణన చాలా సులభము. దీనిని అర్థం చేసుకోవడం కూడా చాలా సులభము. అయితే దీని ఉపయోగం చాలా తక్కువ. నిజంగా చెప్పవలెనంటే ఇది విస్తరణమానాన్ని చెప్పే ఒక బండ పద్ధతి. దీనిలో ఉపయోగాలకంటే అవాంఛనీయ ధర్మాలు చాలా ఎక్కువగా ఉన్నాయి. ప్రతిచయనాల మార్పులకు ఇది చాలా పెద్దగా (ఎక్కువగా) ప్రభావితం చెందుతుంది. వివృత అవధులు ఉన్న దత్తాంశంలో దీని గణన అసాధ్యము. దత్తాంశముయొక్క నిజమైన విస్తరణ చెప్పడానికి వ్యాప్తి నిరుపయోగమవుతుంది.

7.5. చతుర్థాంశ విచలనము : (Semi - inter Quartile Range or Quartile Deviation)

వ్యాప్తి విస్తరణలో ఉన్న దోషాలను తప్పించటానికి చతుర్థాంశ విచలనాన్ని గణన చేస్తారు. వ్యాప్తి గణనలో అత్యధిక, అత్యల్ప అంశాలను తీసుకొన్నట్లుగానే, చతుర్థాంశ విచలనగణన చేయడానికి దిగువ, ఎగువ (Lower and Upper) చతుర్థాంశాలను (Quartiles) తీసుకోవలెను. అంటే శ్రేణులలో ఉన్న అంశాల మొత్తంలో దిగువ 25 శాతం (Lower 25%) ఎగువ 25 శాతం (Higher 25%) విడిచి, మిగిలిన 50 శాతం గణనకు తీసుకొంటాము. దీనివల్ల విస్తరణ గణన చేయుడంతో విపరీత అంశాల ప్రభావం తగ్గుతుంది.

$$\text{చతుర్థాంశ విచలనము } Q.D. = \frac{Q3 - Q1}{2}$$

ఇక్కడ Q.D. = చతుర్థాంశ విచలనము (Quartile Deviation)

Q_1 = దిగువ చతుర్థాంశము (Lower Quartile)

Q_3 = ఎగువ చతుర్థాంశము (Upper Quartile)

$$\text{చతుర్థాంశ విచలన గుణకము} = \frac{Q3 - Q1}{Q3 + Q1}$$

వ్యక్తి శ్రేణులు - చతుర్థాంశ విచలనము :

ఉదా : 4) దిగువ ఇచ్చిన దత్తాంశంనుండి చతుర్థాంశ విచలనము, దాని గుణకాన్ని కనుక్కోండి.

బాలుర ఎత్తులు సెం.మీ. లలో 152, 160, 164, 171, 150, 154, 167, 157, 175, 170, 176.

జవాబు : బాలుర ఎత్తును ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చుకోవలెను.

క్రమసంఖ్య	బాలుర ఎత్తు సెం.మీ.లలో
1	150
2	152
3	154
4	157
5	160
6	164
7	167
8	170
9	171
10	175
11	176
N = 11	

దిగువ చతుర్ధాంశస్థానము $= \frac{N+1}{4}$ వ అంశము,

ఇక్కడ N = 11. కాబట్టి $\frac{N+1}{4} = \frac{11+1}{4} = \frac{12}{4} =$ 3 వ అంశము

3 వ అంశము 154 కనుక -

దిగువ చతుర్ధాంశము $Q_1 = 154$

ఎగువ చతుర్ధాంశస్థానము $Q_3 = \left(\frac{N+1}{4}\right)$ 3 వ అంశం

$= \left(\frac{11+1}{4}\right)$ 3 వ అంశం

$= \frac{12 \times 3}{4}$ వ అంశం

= 9 వ అంశము

ఇక్కడ 9 వ అంశము 171 కనుక -

ఎగువ చతుర్ధాంశము = 171

ఇప్పుడు చతుర్ధాంశ విచలనము $= Q.D. = \frac{Q3-Q1}{2}$

చతుర్ధాంశ విచలనము $= \frac{171-154}{2} = \frac{17}{2} = 8.5$ సెం.మీ.

చతుర్ధాంశ విచలన గుణకము $= \frac{Q3-Q1}{Q3+Q1}$

$$= \frac{171-154}{171+154} = \frac{17}{325} = 052$$

విచ్ఛిన్న శ్రేణులు - చతుర్ధాంశ విచలనము :

విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో చతుర్ధాంశాలను కనుక్కోవడానికి మధ్యగతంలో వలెనే పౌనఃపున్యాన్ని సంచితము చేయవలెను.

$$Q.D. = \frac{Q_3-Q_1}{2}$$

$Q_1 = \frac{N+1}{4}$ వ అంశము ఈ రెండింటిని cf తో గుర్తించి వాటికెదురుగా వున్న 'x' విలువలను Q_1, Q_3 గా పరిగణించవలెను.

$Q_3 = \frac{N+1}{4}$ 3 వ అంశము

గుణకము $= \frac{Q_3-Q_1}{Q_3-Q_1}$

ఉదా : 5) చతుర్ధాంశ విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి :

x :	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
f :	4	8	13	16	18	14	11	9	5	2

జవాబు :

x	f	cf
21	4	4
22	8	12
23	13	25
24	16	41
25	18	59
26	14	73
27	11	84
28	9	93
29	5	98
30	2	100
	N = 100	

$Q_1 = \frac{N+1}{4}$ వ అంశము; $= \frac{100+1}{4}$ వ అంశము; = 25.25 అంశము 25.25 వ అంశం 41 అనే cf లో ఉన్నది. కాబట్టి $Q_1 = 24$

$Q_3 = \frac{N+1}{4} \times 3$ వ అంశము; = 25.25 × 3 వ అంశము; = 75.75 వ అంశము.

75.75 వ అంశం 84 అనే cf లో ఉన్నది కాబట్టి $Q_1 = 27$

$$\therefore Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{27-24}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\therefore \text{గుణకము} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

$$= \frac{27-24}{27+24} = \frac{3}{15} = 0.0588$$

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు : చతుర్థాంశ విచలనము

$$\text{Quartile Deviatin } (Q.D) = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

Q_1 స్థానం $= \frac{N}{4}$ వ అంశం; దీనిని cf లో గుర్తించి దానికెదురుగా ఉన్న తరగతిని Q_1 తరగతిగా తీసుకొని $l + \frac{c \times i}{f}$ అనే సూత్రం ప్రయోగింపవలెను.

Q_3 స్థానం $= \frac{N}{4} \times 3$ వ అంశం; దీనిని cf లో గుర్తించి దానికెదురుగా ఉన్న తరగతిని Q_3 తరగతిగా తీసుకొని $l + \frac{c \times i}{f}$ అనే సూత్రం ప్రయోగించవలెను.

ఇక్కడ l = తరగతి యొక్క దిగువ అవధి.

$c = \frac{N}{4}$ వ అంశానికి దానికి ముందున్న తరగతి యొక్క cf కు తేడా

i = తరగతి అంతరం

f = ఆ తరగతికి ఎదురుగా ఉన్న పౌనఃపున్యం

అయితే అసమగ్ర (inclusive) శ్రేణుల నుండి Q_1, Q_3 లెక్కించ కూడదు. వాటిని సమగ్ర (Exclusive) శ్రేణులుగా మార్చవలెను.

ఉదా. 6 : చతుర్థాంశ విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి:

x	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90	90 -100
f	4	9	13	15	14	16	12	8	6	3

జవాబు :

x	f	c.f
0 - 10	4	4
10 - 20	9	13
20 - 30	13	26
30 - 40	15	41
40 - 50	14	55
50 - 60	16	71
60 - 70	12	83
70 - 80	8	91
80 - 90	6	97
90 - 100	3	100
	N= 100	

Q_1 స్థానం $= \frac{N}{4}$ వ అంశము; $= \frac{100}{4}$ వ అంశం; = 25 వ అంశం. ఇది 26 అనే cf లో ఉన్నది కాబట్టి

Q_1 తరగతి = 20 - 30

$$Q_1 = l + \frac{c \times i}{f} = 20 + \frac{12 \times 10}{13} = 29.23$$

Q_3 స్థానం $= \frac{N}{4} \times 3$ వ అంశము $=$ $c = 25 - 13 = 12$

= 25 × 3 వ అంశము

= 75 వ అంశము

ఇది 83 అనే cf లో ఉన్నది కాబట్టి

Q_3 తరగతి = 60 - 70

$$Q_3 = l + \frac{c \times i}{f} = 60 + \frac{4 \times 10}{12} = 63.33$$

$$\therefore \text{Q. D} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{63.33 - 29.23}{2} = \frac{34.10}{2} = 17.05$$

$$\therefore \text{గుణకము} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{63.33 - 29.23}{63.33 + 29.23} = \frac{34.10}{92.56} = 0.3684$$

ఉదా : 7 చతుర్థాంశ విచలనాన్ని, గుణకాన్ని కనుగొనండి :

x :	0 - 9	10 - 19	20 - 29	30 - 39	40 - 49	50 - 59	60 - 69	70 - 79	80 - 89	90 - 99
f :	3	8	12	13	19	18	17	14	9	5

x	f	c.f
0 - 9	3	3
10 - 19	8	11
20 - 29	12	23
30 - 39	13	36
40 - 49	19	55
50 - 59	18	73
60 - 69	17	90
70 - 79	14	104
80 - 89	9	113
90 - 99	5	118
	N = 118	

Q_1 స్థానం $= \frac{N}{4}$ వ అంశం;

$= \frac{118}{4}$ వ అంశం

$= 29.5$ వ అంశం

ఇది 36 అనే cf లో ఉన్నది కాబట్టి

Q_1 తరగతి = 30 - 39

సమగ్ర (Exclusive) తరగతి = 29.5 - 39.5

$\therefore\ Q_1 = l + \frac{c \times i}{f}$

$= 29.5 + \frac{6.5 \times 10}{13}$ $(c = 29.5 - 23 = 6.5)$ $= 34.5$

Q_3 స్థానం $= \frac{N}{4} \times 3$ వ అంశం

$= 29.5 \times 3$ వ అంశం

$= 88.5$ వ అంశం

ఇది 90 అనే cf లో ఉన్నది కాబట్టి

Q_3 తరగతి = 60 - 69

సమగ్ర తరగతి 59.5 - 69.5

$\therefore\ Q_3 = l + \frac{c \times i}{f}$

$C = 88.5 - 73 \quad = 15.5$

$$= 59.5 + \frac{15.5 \times 10}{17}$$

$$= 59.5 + 9.12 \qquad = 68.62$$

$$\therefore \text{Q. D} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}; \; = \frac{68.62 - 34.5}{2}; \; = \frac{34.12}{2}; = 17.06$$

$$\therefore \text{గుణకము} \; = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}; = \frac{68.62 - 34.5}{68.62 + 34.5}; = \frac{34.12}{103.12}; = 0.3311$$

చతుర్థాంశ విచలనము - ప్రయోజనాలు - లోపాలు :

చతుర్థాంశ విచలనం గణనకూడా వ్యాప్తి విస్తరణవలె చాలాసులువు. దీని విలువ ముఖ్యంగా మధ్యఉన్న 50 శాతం అంశాల మీద ఆధారపడి ఉంటుంది. కాబట్టి విపరీత అంశాల ప్రభావము దీనిమీద ఉండదు. ఇంకా వివృత అవధులున్న దత్తాంశంలో దీనికి ప్రత్యేకమైన ఉపయోగమున్నది. అయితే ఈ ప్రయోజనాలకంటే లోపాలు ఎక్కువగా కనిపిస్తున్నాయి. చతుర్థాంశ విచలనం అన్ని అంశాల మీద ఆధారపడిలేదు సరికదా బీజీయ ప్రస్తావనకు కూడా నిలబడదు. ఇది మొదటి 25 శాతం చివరి 25 శాతం అంశాలను విడిచిపెట్టడం వల్ల 50 శాతం అంశాలు లెక్కలోకి రాకుండపోయినాయి. ప్రతిచయనాల మార్పులకు (Sampling fluctuations) అతిగా ప్రభావితం చెందుతుంది. నిజానికి ఇది విస్తరణమానం కాదు. ఎందువల్లనంటే సగటు చుట్టూ ఉన్న విస్తరణను ఇది చూపడం లేదు. ఇది దూరాన్ని (Distance) మాత్రమే చూపగలుగుతుంది. అంటే చతుర్థాంశ విచలనం సగటునుంచి తీసుకొన్నది కాదు. ఇది స్థాననిర్ణయం వల్ల ఏర్పడిన మానం కాబట్టి కొంతమంది గణాంకశాస్త్రవేత్తలు చతుర్థాంశ విచలనం భాగత్వపు (Partition) మానం కాని విస్తరణ మానం కాదు అనే అభిప్రాయాన్ని వెలిబుచ్చినారు. పై కారణాలవల్ల చతుర్థాంశ విచలనం ఉపయోగం చాలా తక్కువ. అయితే బండపద్ధతిన అధ్యనం (Rough Study) చేయడానికి ఇది ఉపయోగపడుతుంది.

7.6. మాధ్యమ విచలనము (Mean Deaviation) :

"కేంద్ర స్థానపు విలువనుంచి వివిధ అంశాలకు ఉన్న విచలనాల అంకమాధ్యమాన్ని శ్రేణుల మాధ్యమ విచలనంగా నిర్వచించవచ్చు." (Mean deaviation of a series may be defined "as the arithmetic average of the deviations of various items from a measure of central value") "సగటు నుంచి తీసిన విచలనాల యొక్క సగటును "మాధ్యమ విచలనము" అంటారు. మొదట సగటు కనుగొనవలెను. అది అంకమధ్యమం కావచ్చు. లేదా మధ్యగతము కావచ్చును.

$a = \frac{\sum x}{N}, M = \frac{N+1}{2}$ వ అంశము. (ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చిన తర్వాత) కనుగొన్న సగటు నుండి "+, -" గుర్తులు వదిలివేస్తూ విచలనాలు కనుగొనవలెను. విచలనాల మొత్తాన్ని (S / dx /), "N" చేత భాగించవలెను.

$$\text{M.D.} = \frac{\sum |dx|}{N}$$ M.D. = మాధ్యమ విచలనము.

S |dx| = సగటు నుండి తీసిన విచలనాల మొత్తము

(+, - గుర్తులు వదిలివేస్తూ)

N = చలనాల సంఖ్య

$$\text{మాధ్యమ విచలన గుణకము} = \frac{\text{మాధ్యమ విచలనం}}{\text{సగటు}}$$

$$= \frac{\text{M.D.}}{\text{Average}}$$

ఉదా. 8 : మాధ్యమ విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి.

x :	21	34	27	35	30	24	29	22	33	25

అంకమధ్యమం నుండి

S.No.	x	|dx| (అంక మధ్యమం 28 నుండి)
1	21	7
2	34	6
3	27	1
4	35	7
5	30	2
6	24	4
7	29	1
8	22	6
9	33	5
10	25	3
N 10	$\sum x = 280$	$\sum \|dx\| = 42$

$$= \frac{280}{10} = 28$$

$$M.D. = \frac{\sum |dx|}{N} = \frac{42}{10}$$

$$M.D. = 4.2$$

$$\text{గుణకము} = \frac{\text{మాధ్యమ విచలనం}}{\text{సగటు}}$$

$$= \frac{M.D.}{Average} = \frac{4.2}{28} = 0.15$$

మధ్యగతము నుండి :

S.No	x: (ఆరోహణక్రమం)	|dx| (మధ్యగతం 28 నుండి)
1	21	7
2	22	6
3	24	4
4	25	3
5	27	1
6	29	1
7	30	2
8	33	5
9	34	6
10	35	7
N = 10		42

$M = \frac{N+1}{2}$ వ అంశం

$=\frac{10+1}{2}$ వ అంశం

$=\frac{11}{2}$ వ అంశం

$=5.5$ వ అంశం

= 5 వ అంశం = 27, 6 వ అంశం = 29

$\therefore$ 5.5 వ అంశం $=27+50\%$ of 2

$=27+1 \quad =28$

$$\text{M.D.} = \frac{\sum |dx|}{N}$$

$$=\frac{42}{10} = 4.2$$

గుణకము = $\frac{\text{మాధ్యమ విచలనం}}{\text{సగటు}}$

$$=\frac{\text{M.D.}}{\text{Average}}$$

$$=\frac{4.2}{28}=0.15$$

గమనిక : అంకమధ్యమం నుండి లెక్కించిన మాధ్యమ విచలనం 28, మధ్యగతం నుండి లెక్కించిన మాధ్యమ విచలనం కూడా 28. యాధృచ్ఛికంగా ఆ విధంగా సమానంగా వచ్చాయి కాని, సాధారణంగా రెండు విచలనాలు వేరువేరుగా ఉంటాయి.

విచ్ఛిన్న శ్రేణులు : (Disrete series) మధ్యమ విచలనము

మధ్యమ విచలనం (M. D)

M. D. మాధ్యమ విచలనము $=\frac{\sum |fdx|}{N}$

$\sum |fdx|$ = సగటునుండి తీసిన విచలనాలను (+,- వదిలివేస్తూ) వాటి పౌనఃపున్యాలతో హెచ్చించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తము.

N= పౌనఃపున్యాల మొత్తం ముందుగా సగటు కనుగొనవలెను.

అది అంకమధ్యమం కావచ్చును లేక మధ్యగతము కావచ్చును.

అంకమధ్యమం $Q = x + \frac{\sum fdx}{N}$

మధ్యగతం $M=\frac{N+1}{2}$ వ అంశము, దీనిని cf లో గుర్తించి, దానికి ఎదురుగా ఉన్న విచలనాన్ని మధ్యగతముగా తీసుకొనవలెను.

ఆ తరువాత సగటు నుండి ఇతర చలనాలకు విచలనమును కనుగొనవలెను. (+, - గుర్తులు వదిలి వేస్తూ). విచలనాలను పౌనఃపున్యంతో హెచ్చించవలెను. హెచ్చించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తాన్ని "N" చేత భాగించవలెను.

గుణకము = $\frac{\text{మధ్యమ విచలనము}}{\text{సగటు}}$

ఉదా 9: మాధ్యమ విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి.

x :	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Y:	4	7	12	13	15	16	14	9	8	2

జవాబు : అంకమధ్యమంనుండి :

x	f	dx	fdx	|dx|	|fdx|
21	4	-5	-20	4.39	17.56
22	7	-4	-28	3.39	23.73
23	12	-3	-36	2.39	28.68
24	13	-2	-26	1.39	18.07
25	15	-1	-15	0.39	5.85
26	16	0	0	0.61	9.76
27	14	+1	+14	1.61	22.54
28	9	+2	+18	2.61	23.49
29	8	+3	+24	3.61	28.88
30	2	+4	+8	4.61	9.22
N=100			$\sum$ fdx = 64-125		187.78

$\sum = 61$

$$a = x + \frac{\sum fdx}{N} = 26 + \frac{-61}{100} = 26 - 0.61$$

a = 25.39

$$\text{M.D.} = \frac{\sum |fdx|}{N} = \frac{187.78}{100} = 1.88$$

$$\text{గుణకము} = \frac{\text{M.D.}}{\text{సగటు}}$$

$$= \frac{1.88}{25.39} = 0.074$$

మధ్యగతము నుండి

x	f	c.f	|dx|	|fdx|
21	4	4	4	16
22	7	11	3	21
23	12	23	2	24
24	13	36	1	13
25	15	51	0	0
26	16	67	1	16
27	14	81	2	28
28	9	90	3	27
29	8	98	4	32
30	2	100	5	10
	N = 100			187

మధ్యగత స్థానం $= \frac{N+1}{2}$ వ అంశం $= \frac{100+1}{2}$ వ అంశం $= \frac{101}{2}$ వ అంశం $= 50.5$ వ అంశం. ఇది 51 అనే cf లో ఉంది.

కాబట్టి మధ్యగతము (m) = 25

$$M.D. = \frac{\sum |fdx|}{N} = \frac{187}{100} = 1.87$$

$$\text{గుణకము} = \frac{M.D.}{\text{సగటు}}$$

$$= \frac{1.87}{25} = 0.074$$

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు : (Continuous series) మాధ్యమ విచలనము :-

$$M.D. = \frac{\sum |fdx|}{N}$$

M.D. = మాధ్యమ విచలనం

$\sum$ |fdx| = సగటు నుండి తీసిన విచలనాలను (+, - గుర్తులు వదలివేస్తూ), వాటి పౌనఃపున్యాలతో హెచ్చించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తము.

N = పౌనఃపున్యాల మొత్తము ముందుగా సగటు కనుగొనవలె. అది అంకమధ్యమం కావచ్చు లేదా మధ్యగతము కావచ్చు.

$$a = x + \frac{\sum fdx}{N} \times i$$

$$\text{మధ్యగతపు స్థానం} = \frac{N}{2} \text{ వ అంశము}$$

దీనిని cf లో గుర్తించి దానికెదురుగా ఉన్న తరగతిని మధ్యగతపు తరగతిగా తీసుకొనవలె.

$$M = l + \frac{c \times i}{f}$$

$$\text{గుణకము} = \frac{M.D.}{\text{సగటు}}$$

ఉదా : 10: మాధ్యమ విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి.

X:	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90	90 - 100
f:	3	6	8	13	16	18	15	12	6	3

అంకమధ్యం ద్వారా :

x	f	m.v.	dx	fdx	|dx|	|fdx|
0 - 10	3	5	-5	-15	46.4	139.2
10 - 20	6	15	-4	-24	36.4	218.4
20 - 30	8	25	-3	-24	26.4	211.2
30 - 40	13	35	-2	-26	16.4	231.2
40 - 50	16	45	-1	-16	6.4	102.4
50 - 60	18	x.55	0	0	3.6	64.8
60 - 70	15	65	+1	+15	13.6	204.0
70 - 80	12	75	+2	+24	23.6	283.2
80 - 90	6	85	+3	+18	33.6	201.6
90 - 100	3	95	+4	+12		
	100			-105+63=36		1768.8

$$a = x + \frac{\sum fdx}{N} \times i = 55 + \left(\frac{-36}{100}\right) \times 10$$

$$= 55 - 36 \qquad a = 51.4$$

$$M.D. = \frac{\sum |fdx|}{N} = \frac{1768.8}{100} = 17.69$$

$$\text{గుణకము} = \frac{M.D.}{\text{సగటు}}$$

$$= \frac{17.69}{51.4} = 0.34$$

మధ్యగతము ద్వారా :

x	f	c.f	m.v	|dx|	|fdx|
0 - 10	3	3	5	47.22	141.66
10 - 20	6	9	15	37.22	223.32
20 - 30	8	17	25	27.22	217.76
30 - 40	13	30	35	17.22	223.86
40 - 50	16	46	45	7.22	115.52
50 - 60	18	64	55	2.78	50.04
60 - 70	15	79	65	12.78	191.70
70 - 80	12	91	75	22.78	273.36
80 - 90	6	97	85	32.78	196.68
90 - 100	3	100	95	42.78	128.34
	100				1762.24

మధ్యగత స్థానం $= \frac{N}{2}$ వ అంశం $= \frac{100}{2}$ వ అంశం = 50 వ అంశం ఇది 64 అనే cf లో ఉంది

మధ్యగతపు తరగతి = 50 - 60

$$\therefore M = L + \frac{c \times i}{f} = 50 + \frac{4 \times 10}{18} = 52.22 \quad (c = 50 - 46 = 4)$$

$$M.D. = \frac{\sum |fdx|}{N} = \frac{17.62}{52.22} = 17.62$$

$$\text{గుణకము} = \frac{M.D.}{\text{సగటు}}$$

$$= \frac{17.62}{52.22} = 0.34$$

<u>మాధ్యమిక విచలనము - ప్రయోజనాలు - లోపాలు</u>

1. ప్రామాణిక విచలనముతో పోల్చిచూస్తే మాధ్యమ విచలనం గణన సులభము. దీనిని అర్థం చేసుకోవడం కూడా తేలిక.
2. ఇది స్పష్టంగా, నిర్దిష్టంగా నిర్వచించినది కాబట్టి దీని విలువ ఖచ్చితంగాను, నిజమైనది గాను ఉంటుంది.
3. ఇది అన్ని అంశాల మీద ఆదారపడి ఉన్నది. కాబట్టి ఒక అంశంలో మార్పువస్తే మాధ్యమ విచలన విలువలో కూడా మార్పు వస్తుంది.

4. విచలనాలు కేంద్రవిలువనుంచి తీసుకొంటాము. కాబట్టి వివిధ విభాజనాల స్వరూపాల భేదాలను పోల్చి చెప్పడం చాలా సులభము.

లోపాలు :

1. ఈ పద్ధతి ఎల్లప్పుడు నిజమైన ఫలితాలను ఇవ్వలేకపోవచ్చు. కారణమేమిటంటే మాధ్యమ విచలనం గణనలో సగటు, మధ్యగతము అంకమధ్యమము, బాహుళకం కూడా ఉపయోగించవచ్చు. కాని శ్రేణులలో విచరణము చాలా ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు మధ్యగతాన్ని పూర్తిగా విశ్వసించలేము. అంటే మధ్యగతం మీద ఆధారపడటం మంచిది కాదు. అంకమధ్యమమునుంచి మాధ్యమ విచలనం గణన చేయడం అంత శాస్త్రీయ పద్ధతి కాదు. ఎందుచేతనంటే అంక మధ్యమమునుంచి తీసుకొన్న విచనాల సంకలనం, మధ్యగతంనుంచి తీసుకొనే విచలనాల సంకలనం కంటే (గుర్తులను అలక్ష్యం చేసి తీసుకొన్నప్పుడు) ఎక్కువగా ఉంటాయి. బహుళకం నిర్ణయించడం అన్ని వేళలా సాధ్యంకాదు. ఇంకా బాహుళకము అంశాలకు సరియైన ప్రాతినిధ్యము వహించలేదు. కాబట్టి మాధ్యమ విచలనం బాహుళకం నుంచి గణన చేయడం కూడా శాస్త్రీయ పద్ధతి కాకపోవచ్చు.
2. బీజీయ ప్రస్తావనకు ఇది సరిపోదు.

7.7. ప్రామాణికవిచలనము (Standand deveation)

విస్తరణ అధ్యయనం చేయడంలో ప్రామాణిక విచలనము అతిముఖ్యమైనది. అత్యధికంగా ఉపయోగించేమానము.

ప్రామాణిక విచలనమనే పద్ధతిని మొదటిసారిగా 1893 "కార్ల్‌పియర్సన్" అనే గణాంక శాస్త్రజ్ఞుడు ఉపయోగించినాడు. విస్తరణ అవగాహన ఇదిచాలా ప్రాముఖ్యమున్న పద్ధతి. విస్తరణలోని వివిధ పద్ధతుల పరిమితులను అధిగమించి మంచి విస్తరణ మానంనకు కావలసిన లక్షణాలన్నీ ఉండడంవలన ఈ పద్ధతి ఎక్కువ వాడుకలోకి వచ్చింది. ప్రామాణిక విచలనాన్ని మూలమధ్యమ వర్గవిచలనం (Root - mean - square deviation) అని కూడా అంటారు. "అంకమధ్యమం నుండి తీసుకున్న విచలనాల వర్గాల అంకమధ్యమం వర్గమూలాన్ని ప్రామాణిక విచలనంగా శాస్త్రవేత్తలు నిర్వచించినారు. ("Standased deviation is the square root of the arithmetic mean of the square of the deviations measured from the mean")

సగటులలో ఉత్తమమైనది అంకమధ్యమం. అలాంటి అంకమధ్యమం నుండి ప్రామాణిక విచలనం లెక్కించబడుతుంది.

వ్యక్తిగత శ్రేణులు - ప్రామాణిక విచలనం :

వ్యక్తిగత శ్రేణులలో ప్రామాణిక విచలనాన్ని ప్రత్యక్ష పద్ధతి మరియు దగ్గర పద్ధతి ద్వారా లెక్కిస్తారు.

ప్రత్యక్ష పద్ధతి :-

1) ముందుగా అంకమధ్యమం లెక్కించవలెను. $\left(a = \frac{\sum x}{N}\right)$ లేదా $a = x + \frac{\sum dx}{N}$
2) అంకమధ్యమం నుండి ఇతర చలనాలకు విచలనాలు లెక్కించవలె (dx) (deviation from x = dx)
3) విచలనాలకు వర్గాలు లెక్కించవలె ($dx \times dx = dx^2$)
4) $\sum dx^2$ ను N చేత భాగించి వచ్చిన ఫలితానికి వర్గమూలము లెక్కించవలెను. దీనినే ప్రామాణిక విచలనం అంటారు.

ప్రామాణిక విచలనం $\sigma = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N}}$

ఇక్కడ σ = ప్రామాణికవిచలనం

$\sum dx^2$ అంక మధ్యమం నుండి తీసిన విచలనాల వర్గాల మొత్తము

N = చలనాల సంఖ్య లేదా రాశుల సంఖ్య.

ప్రామాణిక విచలన గుణకము : **(Coefficient of S.D)** = $\frac{\sigma}{a}$

σ = ప్రామాణిక విచలనం

a = అంక మధ్యమం

ఉదా 11 : క్రింది దత్తాంశం నుండి ప్రామాణిక విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని లెక్కించండి. 10 మంది కార్మికుల వేతనాలు రూ. 60, 108, 84, 138, 116, 74, 96, 106, 120, 98.

జవాబు : వేతనాలు

S.No	(x)	dx	dx^2
1	60	-40	1600
2	108	+8	64
3	84	-16	256
4	138	+38	1444
5	116	+16	256
6	74	-26	676
7	96	-4	16
8	106	+6	36
9	120	+20	400
10	98	-2	4
N:10	1000		4752

అంకమధ్యమం $Q = \frac{\sum x}{N} \quad = \frac{1000}{10} = 100$

100 నుండి ఇతర చలనాలకు విచలనాలు లెక్కించవలెను.

ప్రామాణిక విచలనం $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}} \quad = \sqrt{\frac{4752}{10}} \quad = \sqrt{475.2} \quad = 21.799$

ప్రామాణిక విచలనం గుణకం $= \frac{\sigma}{a} = \frac{\text{(ప్రామాణిక విచలనం)}}{\text{(అంక మధ్యమం)}}$

$$= \frac{21.799}{100} = 0.21799$$

దగ్గర పద్ధతి : **(Short cut method)** :- ఒక్కొక్కప్పుడు అంకమధ్యమం భిన్నంలో (Fraction) వస్తుంది. ఉదాహరణకు పై లెక్కలో అంకమధ్యమం 100 కు బదులుగా 101.74 వస్తే, దీనినుండి విచలనాలు తీసి, వాటికి వర్గాలు కట్టడం చాలాకష్టం. అటువంటి సమయాలలో విచలనాలను ఊహించిన సగటునుండి తీసుకొంటే ప్రామాణిక విచలన గణన చాలాసులభంగా, దగ్గరగా ఉంటుంది.

ప్రామాణిక విచలనం $\sigma = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N} - \left(\frac{\sum dx}{N}\right)^2}$

ఇక్కడ σ = ప్రామాణిక విచలనం

$\sum$ dx = ఊహించిన సగటునుండి తీసిన విచలనాల మొత్తం

$\sum$ dx^2 = ఊహించిన సగటునుండి తీసిన విచలనాల వర్గాల మొత్తం

N = చలనాలసంఖ్య లేదా రాశుల సంఖ్య.

ఉదా : 12 ప్రామాణిక విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి

x = 24, 31, 27, 25, 28, 20, 29, 23, 22, 30

జవాబు :-

S.No.	x	ఊహించిన సగటు 27 నుండి dx	dx^2
1	24	-3	9
2	31	+4	16
3	27	-0	0
4	25	-2	4
5	28	+1	1
6	20	-7	49
7	29	+2	4
8	23	-4	16
9	22	-5	25
10	30	+3	9
N=10		+10	133
		-21	
		-11	

1. ప్రామాణిక విచలనము $\sigma = \sqrt{\frac{Edx^2}{N} - \left(\frac{Edx}{N}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{133}{10} - \left(\frac{-11}{10}\right)^2} \quad = \sqrt{13.3 - 1.21}$$

$$= \sqrt{12.09} \quad = 3.477$$

2. అంకమధ్యమము $a = x + \frac{\sum dx}{N} \quad = 27 + \frac{-11}{10} \quad = 25.9$

3. ప్రామాణిక విచలన గుణకం $= \frac{\sigma}{a} \quad = \frac{3.477}{25.9} \quad = 0.134$

విచ్ఛిన్నశ్రేణులు - ప్రామాణిక విచలనం :-

ప్రామాణిక విచలనం $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2} \times i$

σ = ప్రామాణిక విచలనం

$\sum fdx$ = ఊహించిన సగటు నుండి తీసిన విచలనాలను వాటి పౌనఃపున్యముతో హెచ్చించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తము

$\sum fdx^2$ = ఊహించిన సగటు నుండి తీసిన విచలనాల వర్గాలను వాటి పౌనఃపున్యముతో హెచ్చించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తము.

N = పౌనఃపున్యం మొత్తము i = సమాన అంతరం

ప్రామాణిక విచలన గుణకం $= \frac{\text{ప్రామాణిక విచలనం}}{\text{అంకమధ్యమం}}$

$$= \frac{\sigma}{a}$$

అంకమధ్యమము $a = x + \frac{\sum fdx}{N} \times i$

ఉదా 13 : 1. ప్రామాణిక విచలనము మరియు దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి.

మార్కులు (x) :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
విద్యార్థుల సంఖ్య (f) :	3	5	8	11	13	16	14	12	9	6	3

x	f	ఊహించిన సగటు 5 నుండి dx	fdx	fdx²
0	3	-5	-15	75
1	5	-4	-20	80
2	8	-3	-24	72
3	11	-2	-22	44
4	13	-1	-13	13
5	16	0	0	0
6	14	+1	+14	14
7	12	+2	+24	48
8	9	+3	+27	81
9	6	+4	+24	96
10	3	+5	+15	75
	N=100		+104	598
			-94	
				+10

1. ప్రామాణిక విచలనము $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{598}{100} - \left(\frac{10}{100}\right)^2} = \sqrt{5.98 - 0.01} = \sqrt{5.97} = 2.44$$

2. అంక మధ్యమము $a = x + \frac{\sum fdx}{N} \quad = 5 + \frac{10}{100} \quad = 5 + 0.1 \quad = 5.1$

గుణకము = $\frac{\text{ప్రామాణిక విచలన}}{\text{అంకమధ్యమం}}$

$$= \frac{2.44}{5.1} = 0.478$$

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు ప్రామాణిక విచలనం

ప్రామాణిక విచలనం $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2} \times i$

10 Note : తరగతులను మధ్యవిలువలుగా మార్చుకొని మధ్యవిలువలనుండి ఊహించిన సగటు తీసుకోవలెను.

$$\text{గుణకము} = \frac{\text{ప్రామాణిక విచలనం}}{\text{అంకమధ్యమము}}$$

$$= \frac{\delta}{a}$$

అంకమధ్యమము $a = x + \frac{\sum fdx}{N} \times i$

ఉదా 14: ప్రామాణిక విచలనాన్ని దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి ?

మార్కులు :	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90	90 - 100
విద్యార్థుల సంఖ్య :	3	6	8	13	16	15	14	12	9	4

x	f	m	ఊహించిన సగటు 55 నుండి dx	fdx	fdx²
0 - 10	3	5	-5	-1	75
10 - 20	6	15	-4	-24	96
20 - 30	8	25	-3	-24	72
30 - 40	13	35	-2	-26	52
40 - 50	16	45	-1	-16	16
50 - 60	15	55	0	-0	0
60 - 70	14	65	+1	+14	14
70 - 80	12	75	+2	+24	48
80 - 90	9	85	+3	+27	81
90 - 100	4	95	+4	+16	64
	N=100	+81	-105	518	-24

ప్రామాణిక విచలనము $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2} \times i$

$$= \sqrt{\frac{518}{100} - \left(\frac{-24}{100}\right)^2} \times i \quad = \sqrt{5.18 - 0.0576} \times i \quad = 2.263 \times 10 \quad = 22.63$$

అంకమధ్యమము $a = x + \frac{\sum fdx}{N} \times i \qquad = 55 + \frac{-24}{100} \times 10 \quad = 55 - 2.4 \quad = 52.6$

$$= \frac{\text{ప్రామాణిక విచలనం}}{\text{అంకమమధ్యమం}} \qquad = \frac{\sigma}{a}$$

గుణకము $= \frac{22.63}{52.6} \quad = 0.43$

ఉదా 15: ప్రామాణిక విచలనం గుణకం లెక్కించండి ?

మార్కులు :	0 - 9	10 - 19	20 - 29	30 - 39	40 - 49	50 - 59	60 - 69	70 - 79	80 - 89	90 - 99
విద్యార్థుల సంఖ్య :	5	7	12	13	16	17	14	9	5	2

x	f	M.V	ఊహించిన సగటు 44.5 నుండి dx	fdx	fdx^2
0 - 9	5	4.5	-4	-20	80
10 - 19	7	14.5	-3	-21	63
20 - 29	12	24.5	-2	-24	48
30 - 39	13	34.5	-1	-13	13
40 - 49	16	44.5	0	0	0
50 - 59	17	54.5	+1	+17	17
60 - 69	14	64.5	+2	+28	56
70 - 79	9	74.5	+3	+27	81
80 - 89	5	84.5	+4	+20	80
90 - 99	2	94.5	+5	+10	50
	N=100		—	+102	488
				-78	
				+24	

1. ప్రామాణిక విచలనము $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2} \times i$

$$= \sqrt{\frac{488}{100} - \left(\frac{+24}{100}\right)^2} \times i \quad = \sqrt{4.88 - 0.0576} \times i \quad = \sqrt{4.8224} \times i \quad = 2.196 \times 10 \quad = 21.96$$

2. అంకమధ్యమము $a = x + \frac{\sum fdx}{N} \times i$

$$= 44.5 + \frac{24}{100} \times i \quad = 44.5 + 0.24 \times 10 \quad = 44.5 + 2.4 \quad = 46.9$$

3. గుణకము $= \frac{\text{ప్రామాణిక విచలనం}}{\text{అంకమధ్యమము}}$

$$= \frac{\sigma}{a} \quad = \frac{21.96}{46.9} \quad = 0.468$$

7.8. విచరణ గుణకము (Cofficient of Variation)

పరమ మానాలు సరిపోల్చి చదవడానికి వీలుపడవు. కాబట్టి సాపేక్షిక మానాలు కావలసి ఉంటాయి. అటువంటి మానాలలో ప్రామాణిక విచలన గుణకం ఒకటి. ప్రామాణిక విచలనానికి, అంకమాధ్యమానికి గల నిష్పత్తిని ప్రామాణిక విచలనగుణకమంటారు. దానిని శాతంలో చూపించినప్పుడు అది విచరణ గుణకము (Coefficient of Variation) అవుతుంది. సాంకేతికంగా దానిని పియర్సన్ మహాశయుడు ఇట్లా చెప్పినాడు. విచరణ గుణకము $V = \frac{\sigma}{a} \times 100$ ఇటువంటి మానానికి వాడుకలో చాలా ప్రాధాన్యము ఉన్నది.

ఎందుకనగా రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ శ్రేణులలోని విచరణను సరిపోల్చి చెప్పడానికి దీనిని ఉపయోగించవలెను. ఉదాహరణకు ఒక ప్రాథమిక పాఠశాలలోని ఉపాధ్యాయుల సగటు జీతము రూ. 5000 అని, ప్రామాణిక విచలనం రూ. 100 అనుకొని, ఇంకొక ఉన్నత పాఠశాలలో ఉపాధ్యాయుల సగటుజీతము 2000రూ॥ ప్రామాణిక విచలనము 100 రూ॥ అనుకొంటే, ఈ రెండు శ్రేణులలో సర్వసమానంగా కనిపించే ప్రామాణిక విచలనాలకు వేర్వేరు అర్థాలున్నాయి. 2000 రూ॥ నుంచి 5000 రూ॥ తీసుకొన్న పరమవిస్తరణ మానాలు

సరిపోల్చడానికి పనికిరాలేదు. కాబట్టి సాపేక్షిక మానము ఎంతైనా అవసరము. పై రెండు శ్రేణులను సరిపోల్చి చెప్పాలనుకుంటే మొదటి శ్రేణిలో విచరణ గుణకము $I = \frac{100}{5000} \times 100 = 2\%$ అట్లాగే రెండో శ్రేణిలో విచరణ గుణకము $I = \frac{100}{2000} \times 100 = 5\%$ కాబట్టి మొదటి శ్రేణిలో స్థిరత్వము, ఎక్కువని చెప్పవచ్చు; అట్లాగే రెండు శ్రేణులమధ్యగాని, వివిధ పరిమాణాలలో ఉన్న (ఎత్తు, బరువు) శ్రేణులమధ్యగాని విచరణను చెప్పడానికి విచరణ గుణకము ఉపయోగపడుతుంది.

ఉదా 16 : కింది పట్టీలో రెండు కంపెనీలలో ఉన్న వాటాల (Shares) విలువలలో మార్పులు (Fluctuations) ఇవ్వడమైనది. వాటిలో ఏ కంపెనీలో ఎక్కువ విచరణ (Variation) ఉన్నదో కనుక్కోండి.

A కంపెనీలో వాటాల విలువ రూ॥ లలో	B కంపెనీలో వాటాల విలువ రూ॥ లలో
318	2542
322	2522
325	2534
312	2532
324	2545
315	2530
308	2566
319	2550

జవాబు :

రెండు కంపెనీలలో విచరణము కనుక్కోవడానికి విచరణ గుణకాన్ని కనుక్కోవలె. అంటే అంకమాధ్యమాలు, ప్రామాణిక విచలనాలు గుణనచేయవలె. అట్లా గణన చేసిన తరువాత రెండు కంపెనీలకు విచరణ గుణకాన్ని కనుక్కొంటే ఆ రెండింటిని సరిపోల్చి చూడవచ్చును.

A కంపెనీ వాటాలు	ఊహించిన అంకమధ్యం నుంచి విచలనాలు	విచలనాల వర్గాలు	B కంపెనీ వాటాలు	ఊహించిన అంకమధ్యమం నుంచి విచలనాలు	విచలనాల వర్గాలు
318	-4	16	2542	-3	9
322	0	0	2522	-23	529
325	+3	9	2534	-11	121
312	-10	100	2532	-13	169
324	+2	4	2545	0	0
315	-7	49	2530	-15	225
308	-14	196	2566	+21	441
319	-3	9	2550	+5	25
N = 8	-38	383	N=8	-65	1519
	+5			+26	
	-33			-39	

ఊహించిన సగటు = 322 ఊహించిన సగటు = 2545

A కంపెనీ

ప్రామాణిక విచలనము

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N} - \left(\frac{\sum dx^2}{N}\right)^2}$$

$$\sqrt{\frac{383}{8} - \left(\frac{-33}{8}\right)^2}$$

$$= \sqrt{47.875 - (4.1)^2} \quad = \sqrt{47.875 - 16.81}$$

$$= \sqrt{31.065} \quad = 5.575$$

B కంపెనీ

ప్రామాణిక విచలనము

$$= \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N} - \left(\frac{\sum dx}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1519}{8} - \left(\frac{-39}{8}\right)^2}$$

$$= \sqrt{189.88 - (4.9)^2} \quad = \sqrt{189.88 - 24.01}$$

$$= \sqrt{165.87} \quad = 12.88$$

A కంపెనీ అంకమధ్యమము

$$= x + \frac{\sum dx}{N}$$

$$= 322 + \frac{-33}{8} = 322 - 4.12$$

= 317.88 రూ॥

B కంపెనీ అంకమధ్యమము.

$$= x + \frac{\sum dx}{N}$$

$$= 2545 + \frac{-39}{8} = 2545 - 4.88$$

= 2541.12 రూ॥

∴ విచలణ గుణకము. $V = \frac{\sigma}{a} \times 100$

$$= \frac{\text{ప్రామాణిక విచలనము}}{\text{అంకమధ్యమము}}$$

A కంపెనీ విచరణ గుణకము $= \frac{5.575}{317.88} \times 100 = 1.754\,\%$

B కంపెనీ విచరణ గుణకము $= \frac{12.88}{2541.12} \times 100 = 0.5069\,\%$

రెండు విచరణ గుణకాలవల్ల కంపెనీలోని వాటాలలో ఎక్కువ విచరణము కనిపిస్తుంది.

(B కంపెనీలో ఎక్కువ స్థిరత్వము (Consistency) ఉన్నదని కూడా చెప్పవచ్చు)

ఉదా : 17: దిగువ ఇచ్చిన దత్తాంశంలో 200 రోజులలో జరిగిన రోడ్డు ప్రమాదాల భోగట్టా ఇచ్చినారు. ప్రమాదాల అంకమధ్యమాన్ని, విస్తృతిని కనుక్కోండి.

రోజు 1 కి జరిగిన ప్రమాదాలు -	0	1	2	3	4	5
రోజులు -	46	76	38	25	10	5

ప్రమాదాల సంఖ్య రోజు 1 కి	రోజులు f	ఊహించిన విచలనాలు dx	మొత్తం విచలనాలు fdx	లబ్దము (fdx x dx) fdx^2
0	46	1	-46	.46
1	76	0	0	0
2	38	+1	+38	38
3	25	+2	+50	100
4	10	+3	+30	90
5	5	+4	+20	80
	N=200		+138 -46 +92	354

అంకమధ్యమము $= x + \frac{\sum fdx}{N}$

$= 1 + \frac{92}{100}$ = 1 + 0.46 = 1.46

విస్తృతి = = (ప్రామాణిక విచలనము)^2 $= \frac{\sum fdx^{2}}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2$

$= \frac{354}{200} - \left(\frac{92}{200}\right)^2$ = 1.77 - 0.2116 = 1.5584 = 1.56

∴ అంకమధ్యము = 1. 46 ప్రమాదాలు

విస్తృతి (Variance) = 1. 56 ప్రమాదాలు

ఉదా :18: దిగువ దత్తాంశంలో రెండు కర్మాగారాలలో పనిచేసేవారి వేతనాలు ఇవ్వడమైనది. అంకమధ్యాన్ని, విస్తృతిని కనుక్కోండి.

వేతనాలు		A కర్మాగారంలో పనిచేసేవారి సంఖ్య	B కర్మాగారంలో పనిచేసేవారి సంఖ్య.
Not Exceeding	40 దాటకుండా	30	45
Exceeding	40 - 80 ,,	25	35
,,	80 - 120 ,,	30	25
,,	120 - 160 ,,	45	40
,,	160 - 200 ,,	25	25
,,	200 - 240 ,,	13	20
,,	240 - 280 ,,	24	5
,,	280 - 320 ,,	8	5
		200	200

జవాబు : పై రెండు కర్మాగారాలకు విడివిడిగా అంకమధ్యాన్ని విస్తృతిని గణనచేయవలె.

వేతనాలు రూ॥లలో	మధ్య విలువలు M.v.	ఊ.స. నుంచిసోపాన విచలనాలు dx	పనిచేసే వారి సంఖ్య f	A కర్మాగారము మొత్తం విచలనాలు fdx	లబ్ధాలు fdx^2	B కర్మాగారము పనిచేయు వారి సంఖ్య f	మొత్తం విచలనాలు fdx	లబ్ధాలు fdx^2
Below40	20	-3	30	-90	270	45	-135	405
40 - 80	60	-2	25	-50	100	35	-70	140
80 - 120	100	-1	30	-30	30	25	-25	25
120 - 160	140	0	45	0	0	40	-0	0
160 - 200	180	+1	25	+25	25	25	+25	25
200 - 240	220	+2	13	+26	52	20	+40	80
240 - 280	260	+3	24	+72	216	5	+15	45
280 - 320	300	+4	8	+32	128	5	+20	80
			N=200	+155	821	N=200	-230	800
				-170			+100	
				-15			-130	

A కర్మాగారము

అంకమధ్యమము $= X + \frac{\sum fdx}{N} \times i \qquad = 140 + \frac{-15}{200} \times 40$

$= 140 - 3 = 137$ రూ॥

విస్తృతి(Variance) = $\sigma^2 = \left[\frac{\sum fdx^2}{N} - \left(\frac{\sum fdx^2}{N} \right)^2 \right] \times (i)^2$

$$= \left[\frac{821}{200} - \left(\frac{-15}{200} \right)^2 \right] \times 40^2$$

$$= \left\{ 4.105 - 0.08^2 \right\} \times 1600$$

$$= (4.105 - 0.0064) \times 1600$$

$= 4.0986 \times 1600 = 6557.76$

B కర్మాగారము

అంకమధ్యమము $= 140 + \frac{-130}{200} \times 40$

$= 140 - 26 = 144$ రూ॥

విస్తృతి = $\sigma^2 = \left[\frac{800}{200} - \left(\frac{-130}{200} \right)^2 \right] \times 40^2$

$= \left\{ 4.0 - (0.65)^2 \right\} \times 1600 \qquad = \left\{ 4.0 - 0.4235 \right\} \times 1600$

$= 3.5775 \times 1600 = 5727$ రూ॥

ప్రామాణిక విచలనము - ప్రయోజనాలు - లోపాలు

ప్రయోజనాలు :

1. పరమ విస్తరణ మానాలన్నిటిలో ప్రామాణిక విచలనము చాలా ప్రధానమైనది. ప్రతిచయనంలోను, సహ సంబంధంలోను (Correlation) ఇది గీటురాయి వంటిది. ఆదర్శ విస్తరణ మానానికి ఉండవలసిన లక్షణాలు చాలా వరకు దీనికి ఉన్నాయి.
2. ప్రామాణిక విచలనము అన్ని అంశాలమీద ఆధారపడి ఉన్నది.
3. దీని నిర్వచనము నిర్దుష్టమైనది. దీని విలువ ఖచ్చితము - స్పష్టము.
4. బీజీయ ప్రస్తావనకు అనుకూలమైనది.
5. ప్రతిచయనాల మార్పులకు (Fluctuations of Sampling) ఇతర విస్తరణ మానాల కంటె ఇది తక్కువగా ప్రభావితమవుతుంది.

లోపాలు :

1. దీని గణన మిగిలిన మానాలకంటే కొంచెం కష్టము.
2. విపరీత అంశాలకు ఎక్కువ భారాన్ని అంకమాధ్యానికి దగ్గరలో ఉన్న, అంశాలకు తక్కువ భారాన్ని ఇస్తుంది. ఎందుకంటే పెద్దసంఖ్యల విచలనాల వర్గాలు, చిన్న సంఖ్యల విచలనాల కంటె అనుపాతంగా (Proportionately) ఎక్కువగా ఉంటాయి. ఉదా: కు విచలనాల 3, 15 యొక్క నిష్పత్తి 1:5 కాని వాటి వర్గాల నిష్పత్తి అంటే 9, 225 ల నిష్పత్తి 1:25 అవుతుంది. అయితే లోపాలు కొన్ని ఉన్నప్పటికీ, ప్రామాణిక విచలనము సుప్రసిద్ధమైన విస్తరణ మానము. కాని ఇది ఆర్థికశాస్త్రవేత్తల, వ్యాపారస్తుల అభిమానాన్ని పొందలేక పోయింది. కారణమేమిటంటే దీనిలో విపరీత అంశాలకు ఎక్కువ భారాన్నివ్వడమే. సాధారణంగా ప్రత్యేకించి చెప్పినపుడు, అంకమాధ్యాన్ని మొదటి శ్రేణి సగటులలో ఎట్లాగైతే ఉపయోగిస్తారో, అట్లానే ప్రామాణిక విచలనాన్ని రెండో ఘాత సగటులలో (Average of the second order) అంటే విస్తరణమానాలలో ఉపయోగిస్తారు.

7.9 సారాంశము

దత్తాంశం లోని విలువలు కేంద్రస్థానం చుట్టూ ఏరకంగా విస్తరించి ఉన్నాయో తెలిపేదానిని "విచరణ మానం" లేదా "విస్తరణ కొలత" అంటారు. వీటినే "ద్వితీయ ఘాత సగటులు" అంటారు. సగటు యొక్క విశ్వసనీయతను తెలుసుకోవడానికి, విచరణత్వాన్ని అదుపులో ఉంచడానికి, రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ శ్రేణులను పోల్చడానికి విస్తరణ ఉపయోగపడుతుంది.

విచరణ మానాలు ముఖ్యంగా నాలుగు. అవి "వ్యాప్తి", చతుర్థాంశ విచలనం, మాధ్యమ విచలనం, ప్రామాణిక విచలనం, అత్యధిక, అత్యల్ప విలువల తేడాను వ్యాప్తి అంటారు. వ్యాప్తిలోని దోషాలను తప్పించడానికి చతుర్థాంశ విచలనం గణన చేస్తారు. శ్రేణులలోని మొదటి 25% చివరి 25% విలువలను వదిలి, మిగిలిన 50% విలువల విచలనాన్ని చతుర్థాంశ విచలనం అంటారు. మూడవది మాధ్యమ విచలనం. చతుర్థాంశ విచలనం లోని లోపాలను సర్దుబాటు చేయడానికి మాధ్యవిచలనం రూపొందించబడింది. సగటునుండి తీసిన విచలనాల సగటును మాధ్యమ విచలనం లేదా సగటు విచలనం అంటారు. (+, - గుర్తులు వదిలివేస్తూ) దీనిని అంకమధ్యమంనుండి మరియు, మధ్యగతంనుండి లెక్కిస్తారు. విస్తరణ అధ్యయనం చేయడంలో ప్రామాణిక విచలనం అతిముఖ్యమైనది. వివిధ విస్తరణ మానాలలో ఉన్న పరిమితులను అధిగమించి, మంచి విస్తరణ మానానికి కావలసిన లక్షణాలన్నీ ఉండడంవలన ప్రామాణిక విచలనం ఎక్కువ వాడుకలోనికివచ్చింది. అంకమధ్యమంనుండి తీసిన విచలనాల వర్గాల అంకమధ్యమం వర్గ మూలాన్ని ప్రామాణిక విచలనం అంటారు. సగటులలో ఉత్తమమైన అంకమధ్యమం ద్వారా ప్రామాణిక విచలనం లెక్కించబడుతుంది.

రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ శ్రేణులలోని విచరణను సరిపోల్చి చెప్పడానికి ఉపయోగించే మానాలను విచరణ గుణకాలు అంటారు. దీనిని సాపేక్షిక మానం అంటారు. అందులో ముఖ్యమైనది ప్రామాణిక విచలన గుణకం. ప్రామాణిక విచలనానికి అంక మధ్యమానికి గల నిష్పత్తిని ప్రామాణిక విచలన గుణకమంటారు. ఇలాంటివే - వ్యాప్తి గుణకం, చతుర్థాంశ విచలన గుణకం, మాధ్యమ విచలన గుణకం. వీటిని శాతాలుగా చెబుతారు.

7.10 ప్రశ్నలు

1) విచరణ మానం అనగానేమి ?
2) విచరణ మానాలను నిర్వచించండి.
3) విచరణ మానం ఉద్దేశ్యాలను వ్రాయండి.
4) విచరణ మానాలు ఎన్నిరకములు ? వివరించండి.
5) వివిధ రకాల విచరణ మానాల గురించి వ్రాయండి.
6) వ్యాప్తి అనగా నేమి ?
7) వ్యాప్తి యొక్క ప్రయోజనాలు, లోపాలు వ్రాయండి.
8) చతుర్థాంశ విచలనం అనగా నేమి ?
9) చతుర్థాంశ విచలనం ప్రయోజనాలు, లోపాలను చర్చించండి.
10) మాధ్యమ విచలనం నిర్వచించండి.
11) మాధ్యమ విచలనం ప్రయోజనాలు, లోపాలు గురించి వ్రాయండి.
12) ప్రామాణిక విచలనం అనగా నేమి ? దాని ప్రాముఖ్యతను వివరించండి.
13) విచరణ గుణకం అనగా నేమి ? దాని ప్రాముఖ్యతను వివరించండి.
14) ప్రామాణిక విచలనం ప్రయోజనాలు, లోపాలు చర్చించండి.

అభ్యాసాలు

1) క్రింది దత్తాంశానికి వ్యాప్తిని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి.

మార్కులు : 67, 76, 58, 21, 35, 49, 12, 3, 94, 85

2) క్రింది దత్తాంశానికి వ్యాప్తిని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి.

వేతనాలు రూ॥	71	72	73	74	75	76	76	78	79	80
కార్మికుల సంఖ్య	5	6	11	13	19	15	15	8	6	2

3) క్రింది దత్తాంశానికి వ్యాప్తిని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి.

x :	10 - 15,	15 - 20,	20 - 25,	25 - 30,	30 - 35,	40 - 45,	45 - 50
f :	3	7	12	13	15	9	6

4) చతుర్థాంశ విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి.

కార్మికుల వేతనాలు రూ॥ : 27 31 32 28 40 39 37 34 30 29

5) చతుర్థాంశ విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి.

మార్కులు :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
విద్యార్థుల సంఖ్య:	2	3	6	12	13	15	16	14	9	8	2

6) చతుర్థాంశ విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి.

x :	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50
f :	6	9	13	18	21	19	17	16	12	8

7) చతుర్థాంశ విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి.

x :	0 - 2,	2 - 4,	4 - 6,	6 - 8,	8 - 10,	10 - 12,	12 - 14,	14 - 16,	16 - 18,	18 - 20
f :	7	13	18	23	22	20	16	15	14	11

8) చతుర్థాంశ విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి.

x :	1 - 10	11 - 20	21 - 30	31 - 40	41 - 50	51-60	61 - 70	71 - 80	81 - 90	91 - 100
f :	5	9	13	19	22	23	21	18	17	12

9) చతుర్థాంశ విచలనాన్ని దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి.

తరగతి మధ్య విలువలు :	115	125	135	145	155	165	175	185	195	205
పౌనఃపున్యము (f) :	6	12	13	21	25	24	23	21	19	7

10) చతుర్థాంశ విచలనాన్ని, గుణకాన్ని కనుగొనండి.

తరగతుల మధ్యవిలువలు :	2.5	7.5	12.5	17.5	22.5	27.5	32.5	37.5	42.5	47.5
పౌనఃపున్యము (f) :	6	9	13	18	17	16	12	8	6	5

11) చతుర్థాంశ విచలనాన్ని, గుణకాన్ని కనుగొనండి.

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య	మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
10 కంటే తక్కువ	4	70 కంటే తక్కువ	83
20 „ „	11	80 „ „	92
30 „ „	24	90 „ „	97
40 „ „	41	100 „ „	100
50 „ „	57		
60 „ „	71		

12. మధ్యమ విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని అంకమధ్యమ మరియు మధ్యగతం ద్వారా కనుగొనండి.

x : 75 64 79 67 70 61 68 82 63 71

13. మాధ్యమ విచలనాన్ని, అంకమధ్యమం మరియు మధ్యతం ద్వారా కనుగొనండి.

x : 3.2 6.7 4.5 9.4 8.6 6.8 1.3 0.9 4.1 2.0

14. మాధ్యమ విచలనాన్ని, గుణకాన్ని అంకమధ్యమం మరియు మధ్యగతం ద్వారా కనుగొనండి.

x : 12.6 13.9 19.8 14.7 11.5 17.3 16.2 10.1 15.4 18.0 16.7

15. మాధ్యమ విచలనాన్ని దాని గుణకాన్ని అంకమధ్యమం మరియు మధ్యగతం ద్వారా కనుగొనండి.

x :	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
f .	3	8	13	19	16	14	12	9	4	2

16. మాధ్యమ విచలనాన్ని మధ్యగతం ద్వారా కనుగొనండి

x :	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
f :	5	8	13	16	18	14	12	8	4	2

17. మాధ్యమ విచలనాన్ని , దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి

x :	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
f :	13	18	19	23	26	24	22	21	19	15

18. మాధ్యమ విచలనాన్ని దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి

x :	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99
f :	5	9	12	13	14	16	13	9	7	2

19. మాధ్యమ విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
10 కంటే తక్కువ	3
20 „ „	10
30 „ „	19
40 „ „	32
50 „ „	51
60 „ „	68
70 „ „	82
80 „ „	94
90 „ „	98
100 „ „	100

20. మధ్యగతము ద్వారా మాధ్యమ విచలనాన్ని దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి.

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
100 కంటే తక్కువ	100
10 „ „	97
20 „ „	89
30 „ „	76
40 „ „	60
50 „ „	42
60 „ „	28
70 „ „	16
80 „ „	7
90 „ „	3

21. మాధ్యమ విచలనాన్ని దాని గుణకాన్ని మధ్యగతం ద్వారా కనుగొనండి.

x :	0 - 99	100 - 199	200 - 299	300 - 399	400 - 499	500 - 599	600 - 699	700 - 799	800 - 899	900 - 999
f :	2	8	13	15	18	14	11	9	7	3

22. ప్రామాణిక విచలనము దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి.

x :	75	80	82	76	79	89	85	80	83	86

23. ప్రామాణిక విచలనము, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి

x :	24	27	35	31	33	30	21	37	36	32

24. ప్రామాణిక విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి

x :	75	49	56	64	70	65	67	73	58	74

25. ప్రామాణిక విచలనాన్ని దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి

x :	345	352	341	350	355	357	354	344	348	349	341	346

26. ప్రామాణిక విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి.

x :	160	170	173	164	167	161	175	177	172	169	159	165

27. ఈ క్రింది రెండు శ్రేణుల్లో ఎక్కువ స్థిరత్వం దేనిలో ఉంది.

x :	47	21	35	76	43	28	54	50	62	40
Y:	21	98	95	6	75	42	67	24	55	13

28. రెండు కంపెనీల వాటాల ధరలు ఇలావున్నాయి. ఎక్కువ విచలనము దేనిలో ఉంది ?

Aw :	12	15	21	16	9	13	10	17	14	21	11	8
Bw :	107	109	100	111	97	93	96	104	101	108	106	105

29. భరత్ మరియు రాము అనే ఇద్దరు విద్యార్థులకు 10 పరీక్షలలో వచ్చిన మార్కులు ఇలా వున్నాయి. ఇద్దరిలో ఎవరు తెలివైన వారో నిర్ణయించండి.

భరత్ :	42	70	36	30	48	45	34	50	60	25
రాము :	55	95	42	20	60	50	48	70	80	10

30. ఈ క్రింది రెండు శ్రేణుల్లో విచలనం దేనిలో ఎక్కువగా వుంది ?

x :	3	87	64	1	12	76	0	50	60	85	96	24
y :	75	86	63	47	55	60	49	21	13	70	49	2

31. ఈ క్రింది శ్రేణుల్లో దేనికి విచలనం ఎక్కువగా వుంది; దేనికి స్థిరత్వం ఎక్కువగా ఉంది ?

x :	5	12	17	14	13	10	6	8	13	15	16	9
y :	45	54	49	50	51	53	42	47	48	55	54	52

32. ప్రామాణిక విచలనము, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి : విచరణ గుణకం కనుగొనండి.

x :	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
y :	5	9	13	17	18	16	14	7	8	3

33. ప్రామాణిక విచలనము, దాని గుణకాన్ని, విచరణ గుణకాన్ని కనుగొనండి.

x :	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
y :	3	7	11	13	17	16	12	9	8	4

34. ప్రామాణిక విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి

x :	0 - 5,	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50
f :	4	7	8	12	18	17	13	11	6	4

35. ప్రామాణిక విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి.

x :	20 - 24	24 - 28,	28 - 32,	32 - 36,	36 - 40,	40 - 44,	44 - 48,	48 - 52,	52 - 56
f :	8	12	13	15	18	14	9	7	4

36. ప్రామాణిక విచలనాన్ని, గుణకాన్ని లెక్కించండి

x :	0 - 9,	10 - 19,	20 - 29,	30 - 39,	40 - 49,	50 - 59,	60 - 69,	70 - 79,	80 - 89,	90 - 99
f :	4	8	12	13	15	14	12	9	8	5

37. ప్రామాణిక విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి

x :	0 - 99	100 - 199	200 - 299	300 - 399	400 - 499	500 - 599	600 - 699	700 - 799	800 - 899	900 - 999
f :	5	7	12	13	16	17	14	9	5	2

38. ప్రామాణిక విచలనము దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి

x :	0 - 4	5 - 9	10 - 14	15 - 19	20 - 24	25 - 29	30 - 34	35 - 39	40 - 44	45 - 49
f :	13	17	19	23	27	25	22	21	19	14

39. ప్రామాణిక విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి.

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
0 కంటే తక్కువ	100
10 „ „	97
20 „ „	89
30 „ „	77
40 „ „	64
50 „ „	57
60 „ „	42
70 „ „	28
80 „ „	7
90 „ „	5

40. ప్రామాణిక విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
10 కంటే తక్కువ	4
20 „ „	11
30 „ „	20
40 „ „	33
50 „ „	50
60 „ „	66
70 „ „	81
80 „ „	93
90 „ „	98
100 „ „	100

41. 100 కంపెనీలలో లాభనష్టాల పరిస్థితి క్రింది విధంగా వుంది. ప్రామాణిక విచలనాన్ని కనుగొనండి.

లాభనష్టాలు	కంపెనీల సంఖ్య	లాభనష్టాలు	కంపెనీల సంఖ్య
4000 - 5000	5	1000 -- 0	16
3000 - 4000	9	2000 -- 1000	14
2000 - 3000	12	3000 -- 2000	8
1000 - 2000	13	4000 -- 3000	4
0 - 1000	17	5000 -- 4000	2

42. ప్రామాణిక విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి

x :	4000 - 5000	3000 - 4000	2000 - 3000	1000 - 2000	0 - 1000
f :	2	7	9	13	16
x :	1000 - 0	2000 -1000	3000 -2000	4000 -3000	5000 - 4000
f :	17	14	12	7	3

43. ప్రామాణిక విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని కనుగొనండి.

x :	500-600	400-500	300-400	200-300	100-200	0-100
f :	20	30	60	20	10	8
x :	-100 - 0	-200 - -100	-300 - -200			
f :	12	16	20			

44. ప్రామాణిక విచలనము కనుగొనండి.

రష్యాలోని ఒక పట్టణంలో 1 సంవత్సరకాలంలో నమోదైన ఉష్ణోగ్రతలు :-

ఉష్ణోగ్రత^{0}c	రోజుల సంఖ్య
-40^{0}c - -30^{0}c	10
-30^{0}c - -20^{0}c	28
-20^{0}c - -10^{0}c	30
-10^{0}c - -0^{0}c	42
-0^{0}c - -10^{0}c	65
-10^{0}c - -20^{0}c	180
-20^{0}c - -30^{0}c	10
	365

45. ఈ క్రింది రెండు అంశాలలో ఎందులో ఎక్కువ స్థిరత్వం ఉన్నది ?

తరగతులు :	0 - 2	2 -4	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14	14 - 16	16 -18	18 - 20
పౌనఃపున్యం 1 :	3	8	9	13	17	16	15	14	3	2
పౌనఃపున్యం 2 :	5	7	12	15	18	14	13	9	5	2

రచయిత

తాడిబోయిన నాగేశ్వరరావు

పాఠం - 8

వైషమ్యము

ఈ పాఠం చదవటం వలన వైషమ్యమానమంటే ఏమిటి? వైషమ్యమాన కొలతలను గూర్చి వైషమ్యమాన రకాలు, లెక్కింపులను గూర్చి తెలుసుకోవచ్చు.

ముఖ్యాంశాలు :

8.1 ఉపోద్ఘాతం

8.2. వైషమ్య నిర్వచనం

8.3 వైషమ్య ఉద్దేశాలు

8.4 వైషమ్యానికి, విస్తరణకూ గల వ్యత్యాసాలు

8.5 వైషమ్య రకాలు

ఎ) సౌష్ఠవ విభాజనము

బి) అసౌష్ఠవ విభాజనము

8.6 వైషమ్య పరీక్షలు

8.7 వైషమ్య కొలతలు

ఎ) పరమ వైషమ్య కొలతలు

బి) సాపేక్ష వైషమ్య కొలతలు

1) కార్ల్ పియర్సన్ వైషమ్య గుణకము

2) బౌలీ వైషమ్య గుణకము

8.8 సారాంశము

8.. ప్రశ్నలు, అభ్యాసాలు

8.1 ఉపోద్ఘాతం

పౌనఃపున్య విభాజనం యొక్క లక్షణాలను వర్ణించే అనేక మానాలలో "వైషమ్యానికి" ప్రముఖస్థానమున్నది. ఉదాహరణకు రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ విభాజనాలలో అంకమధ్యమము, ప్రామాణిక విచలనం కూడా సమానంగా ఉండవచ్చు. కాని వాటి స్వరూపాలలో చాలా తేడా ఉండవచ్చు. అందువల్ల "వైషమ్యము" గణన చేయవలసిన అవసరం ఏర్పడింది. వైషమ్యమానాలు పలురకాల విభాజనాలలో గల తారతమ్యాలను తెలుసుకొనడానికి తోడ్పడుతాయి.

ఉదాహరణ : I

(m)	(f)
0 - 5	10
5 - 10	10
10 - 15	60
15 - 20	60
20 - 25	30
25 - 30	10
	200

అంకమధ్యమము = 15

ప్రామాణిక విచలనం = 6

ఉదాహరణ : II

(m)	(f)
0 - 5	10
5 - 10	40
10 - 15	30
15 - 20	90
20 - 25	20
25 - 30	10
	200

అంకమధ్యమము = 15

ప్రామాణిక విచలనం = 6

పై రెండు ఉదాహరణలలోనూ అంకమధ్యమము, ప్రామాణిక విచలనం రెండూ ఒకే విధంగా ఉన్నాయి. అంకమధ్యమము 15 ప్రామాణిక విచలనం 6 కాని వాటి స్వరూపాలలో చాలా తేడా ఉన్నది. ఉదాహరణ I లో చూపిన దత్తాంశములో పౌనఃపున్యము సౌష్టవముగా (Symmetrical) ఉన్నదనీ, ఉదాహరణ II లోని పౌనఃపున్యము అసౌష్టవముగా (Asymmetrical) ఉన్నదనీ గమనించవచ్చు. కనుక విభాజనలలోని పలురకాల తారతమ్యాలను తెలుసుకోవడానికి వైషమ్యమానాలు తోడ్పడుతాయి.

8.2. వైషమ్యం - నిర్వచనం

వైషమ్యానికి ప్రముఖ గణాంక శాస్త్రవేత్తలు కొన్ని ముఖ్యమైన నిర్వచనాలను ఇచ్చారు. అవి :

ఎ) "వైషమ్యం సౌష్టవం లోపించినటువంటిది. పటం మీద పౌనఃపున్య విభాజనాన్ని చూపినపుడు అంశాలలో ఉన్న వైషమ్యం ఎక్కువగా మధ్యమం యొక్క ఒక పక్కకంటె మరోపక్కకు విస్తరించే ప్రవృత్తితో ఉంటుంది" అని రిగిల్‌మెన్ మరియు ఫ్రిన్ బీ అభిప్రాయం.

బి) "ఒక విభాజనం సౌష్టవంగా లేకపోతే దానిని వైషమ్యం లేదా అసౌష్టవం అంటారు" అని క్రాక్స్‌టన్, కౌడెన్‌లు నిర్వచించారు.

సి) గారెట్ అభిప్రాయం ప్రకారం "విభాజనంలోని వివిధ బిందువుల వద్ద మధ్యమం, మధ్యగతం వాలినప్పుడు, తుల్యస్థితి ఎడమకుగానీ, కుడికిగానీ మారినప్పుడు, దానిని వైషమ్య విభాజనం అంటారు."

డి) "వైషమ్యమానాలు వైషమ్యపు దిశను, స్థాయిని చెబుతాయి. సౌష్టవ విభాజనంలో మధ్యమం, మధ్యగతం, బహుళకం ఒకే రకంగా ఉంటాయి. బహుళకంనుంచి మధ్యమం ఎంత ఎక్కువ జరిగితే వైషమ్యం అంత అధికంగా ఉంటుంది" అని సింప్సన్ మరియు కాఫ్కా ఉద్దేశం.

8.3 వైషమ్యం ఉద్దేశాలు

1) వైషమ్యం పౌనఃపున్య విభాజనంలో విలువల సాంద్రత స్థాయినీ, స్వభావాన్నీ తెలుసుకోవడానికి సహాయపడుతుంది. విలువల సాంద్రత ఎక్కువుందో, తక్కువుందో కూడా మనం తెలుసుకోవచ్చు.

2) వైషమ్యం మధ్యమం, మధ్యగతం, బహుళకం మొదలైన సగటుల అనుభవపూర్వక సంబంధాలను తెల్సుకోవడానికి సహాయపడుతుంది. ఈ సంబంధాలు వైషమ్యం చెందిన విభాజనంపై కొంతమేరకు ఆధారపడి ఉంటాయి.

3) సామాన్యత్వం నుంచి ఇచ్చిన విభాజనం ఏ మేరకు జరిగిందో తెల్సుకోవడానికి వైషమ్యమానాలు ఉపయోగపడతాయి. సామాన్య విభాజనం ప్రమేయం మీద గణాంక మానాలు ఎక్కువగా ఆధారపడి ఉన్నందువలన వైషమ్యమానాలను గురించి అధ్యయనం చేయటం తప్పనిసరి.

8.4 వైషమ్యానికి, విస్తరణకూ గల వ్యత్యాసాలు

వైషమ్యము	విస్తరణ
1. కేంద్ర విలువల చుట్టూగల విభాజనవు సౌష్టవాన్ని తెలియజేస్తుంది.	1. కేంద్ర విలువ చుట్టూ విలువల వ్యాపనాన్ని తెలియజేస్తుంది.
2. ఇది విచరణ దిశను, అది సౌష్టవత నుండి ఏ మేరకు వైదొలిగిందో తెలియజేస్తుంది.	2. ఇది విచరణ పరిమాణాన్ని పరిశీలిస్తుంది.
3. వైషమ్యం కేంద్ర విలువకు రెండు వైపుల వున్న విచరణాల స్వభావాన్ని నిర్ణయిస్తుంది.	3. పౌనఃపున్య విభాజనంలోని వ్యక్తిగత విలువలకు సగటు ఎంత వరకు ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుందో తెలియజేస్తుంది.

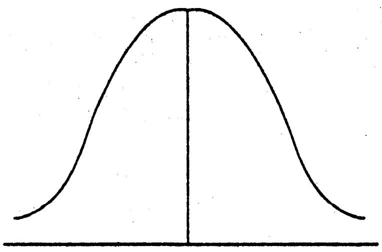
8.5 వైషమ్యాలు - రకాలు

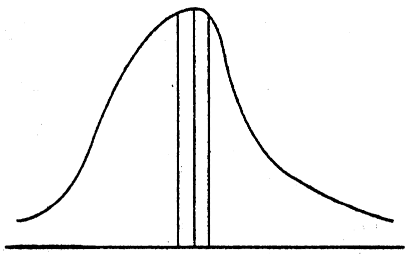
పౌనఃపున్య విభాజనాలు సౌష్టవం లేదా అసౌష్టవం కావచ్చు.

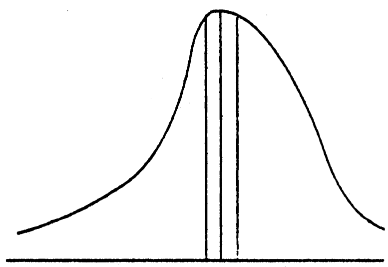
1. సౌష్టవ విభాజనం : మధ్యమం, మధ్యగతం, బహుళకం అన్నీ సమానంగా ఉంటాయి. మధ్యగతం లేదా బాహుళకం నుంచి తీసుకున్న ధనాత్మక విచలనాల మొత్తం ఋణాత్మక విచలనాల మొత్తానికి సమానంగా ఉంటాయి. మధ్యగతం నుంచి దిగువ, ఎగువ చతుర్థాంశాలు, ఒకటి, తొమ్మిది దశాంశాలు, పది, తొంభై శతాంశాలు సమాన దూరంలో ఉంటాయి. బాహుళకానికి అటూ ఇటూ ఉన్న పౌనఃపున్యాలు సమానంగా ఉంటాయి. ఈ పౌనఃపున్యాలు ఒక బిందువు వరకూ పెరుగుతూ పోతాయి; అదే మార్గంలో ఆ తర్వాత తగ్గుతూ పోతాయి.

2. అసౌష్టవ విభాజనం : సామన్యత్వం నుంచి వైదొలగిన విభాజనాన్ని వైషమ్యంగల విభాజన అంటారు. అసౌష్టవ విబాజనాలు ధనాత్మకంగా, ఋణాత్మకంగా ఉండవచ్చు. ధనాత్మక వైషమ్యంలో అంకమధ్యమం విలువ గరిష్టం, బాహుళకపు విలువ కనిష్టం. ఈ రెండు విలువల మధ్య మధ్యగతం ఉంటుంది.

వైషమ్యం ఋణాత్మకమైతే మధ్యగతం కంటే అంకమధ్యమం తక్కువ, బాహుళకం కంటే మధ్యగతం తక్కువ. అంటే బాహుళకం విలువ గరిష్టంగా వుండి, అంకమధ్యమం విలువ కనిష్టం. ఈ రెండు విలువల మధ్య మధ్యగతం ఉంటుంది.


A.M.= Median = Mode
సౌష్టవ విభాజనం


Mode M A.M.
ధనాత్మ వైషమ్య విభాజనం


A.M. M Z
ఋణాత్మ వైషమ్య విభాజనం

8.6 వైషమ్యం పరీక్షలు (Tests of Skewness)

విభాజనములో వైషమ్యం ఉన్నదా లేదా అనే విషయం తెలుసుకోవలసి వచ్చినప్పుడు దిగువ యిచ్చిన పరీక్షలను చేయవలెను.

1. అంకమధ్యమం, మధ్యగతం, బాహుళకం సమానంగా ఉండకూడదు. మధ్యమం, బాహుళకం మధ్య వ్యత్యాసం ఎక్కువగా ఉంటే, వైషమ్యం అధికంగా ఉంటుంది.
2. పరిమితంగా వైషమ్యంగల విభాజనంలో
   అంకమధ్యమం = బాహుళకం + (మధ్యగతం - బాహుళకం) 2/3
3. దత్తాంశమును గ్రాఫ్ గీస్తే అది గంటాకార వక్రాన్ని చూపకూడదు. ఎక్కువభాగం కుడివైపుకు లేదా ఎడమవైపుకు సాగి ఉంటుంది.
4. వక్రరేఖ కేంద్ర బిందువు నుండి ఒక లంబరేఖ గీస్తే దానికి రెండువైపుల సమానంగా ఉండదు.
5. మధ్యగతం లేదా బాహుళకం నుంచి తీసుకున్న ధనాత్మక విచలనాల మొత్తం ఋణాత్మక విచలనాల మొత్తానికి సమానమవకూడదు.
6. మధ్యగతం నుంచి దిగువ, ఎగువ చతుర్థాంశాలు, ఒకటి, తొమ్మిది దశాంశాలు, పది, తొంభై శతాంశాలు సమాన దూరంలో ఉండవు.
7. బాహుళకానికి అటూ ఇటూ గల పౌనఃపున్యాలు సమానంగా ఉండవు.

8.7 వైషమ్యపు కొలతలు (Measures of Skewness)

ఒక శ్రేణిలోని అసౌష్టవం యొక్క మార్గాన్ని, పరిధిని వైషమ్యాల గణాంక మానాల సహాయంతో లెక్కిస్తారు. ఈ కొలతలు రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ శ్రేణులను పోల్చడానికి సాయపడతాయి. ఈ కొలతలు పరమ వైషమ్యకొలతలు (Absolute measures of Skewness) కావచ్చు లేదా సాపేక్ష వైషమ్య కొలతలు (Relative measures of Skewness) కావచ్చు.

ఎ) పరమ వైషమ్యపు కొలతలు :

ఇచ్చిన శ్రేణిలోని బాహుళకానికి, అంక మధ్యమానికి గల వ్యత్యాసాన్ని తీసుకుని వైషమ్యాన్ని లెక్కిస్తారు. బాహుళకం కంటె అంకమధ్యమం విలువ ఎక్కువగా ఉంటే, ఆ విభాజనాన్ని ధనాత్మకంగా వైషమ్యంతో కూడినదంటారు. బాహుళకం కంటె అంక మధ్యమం విలువ తక్కువగా ఉంటే, ఆ విభాజనాన్ని ఋణాత్మకంగా వైషమ్యంతో కూడినదని అంటారు.

కింది కారణాలవల్ల పరమవైషమ్య కొలతలు అసంతృప్తికరమైనవిగా భావించడం జరుగుతుంది.

1. విభాజనపు విలువల్ని ఏ యూనిట్లలో ప్రకటిస్తే పరమ వైషమ్య కొలతలని కూడా ఆ యూనిట్లలోనే ప్రకటించాలి. అందువలన విలువలు వివిధ యూనిట్లలో ప్రకటించినప్పుడు రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ విభాజనాలను సరిపోల్చడానికి ఇది పనికిరాదు.
2. రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ విభాజనాల పౌనఃపున్యవక్రాలు ఒకేరకంగా ఉండవచ్చు. కాని ఒక శ్రేణిలో అంక మాధ్యమానికీ, బాహుళకానికీ మధ్య వ్యత్యాసం ఎక్కువగా ఉండి, మిగతా వాటిల్లో తక్కువగా ఉండవచ్చు. అందువలన పరమవైషమ్య కొలతలు పౌనఃపున్య విభాజనాలను సరిపోల్చడానికి ఏ మాత్రం ఉపయోగపడవు.

బి) సాపేక్ష వైషమ్య కొలతలు

వివిధ యూనిట్లలో ఉన్న రెండు అంతకంటే ఎక్కువ విభాజనాల ఫలితాలను సరిపోల్చడానికి సాపేక్ష వైషమ్య కొలతలను గణన చేయాలి. వివిధ విభాజనాలను నేరుగా సరిపోల్చడానికి సాపేక్ష వైషమ్య కొలతలు సహాయపడతాయి. వీటిని వైషమ్య గుణకాలు అంటారు. వైషమ్య సాపేక్షమానం శుద్ధ సంఖ్యను ఇస్తుంది. విభాజనాల విలువలను ప్రకటించే యూనిట్లకు ఆ సంఖ్య స్వతంత్రంగా ఉంటుంది.

సాపేక్ష వైషమ్య కొలతలు ప్రధానంగా నాలుగు రకాలు. అవి:

(i) కార్ల్ పియర్సన్ వైషమ్య గుణకం

(iii) కెల్లీ వైషమ్య గుణకం

(iv) ఘాతికలకు ఉపయోగించే వైషమ్య కొలతలు

(i) కార్ల్ పియర్సన్ వైషమ్య గుణకం : ఈ వైషమ్య గుణకాన్ని కార్ల్ పియర్సన్ అనే గణాంక శాస్త్రవేత్త సూచించాడు. అందువలన దీనికి ఆ పేరు వచ్చినది. ఇది అంక మధ్యమం, బాహుళకం మధ్యగల తేడాపై ఆధారపడి ఉంటుంది. ఈ తేడాను ప్రామాణిక విచలనముచే భాగించితే సాపేక్ష వైషమ్యపు కొలత వస్తుంది. వైషమ్యము ధనాత్మకమైతే బాహుళకం కంటే అంకమధ్యమం ఎక్కువగా ఉంటుంది, ఋణాత్మకమైతే అంకమధ్యమంకన్నా బాహుళకం తక్కువగా ఉంటుంది.

కార్ల్ పియర్సన్స్ వైషమ్య గుణకాన్ని లెక్కించటానికి దిగువ సూత్రాన్ని సూచించాడు. $SKP = \frac{A.M. - Mode}{\sigma}$

బాహుళకం స్పష్టంగా నిర్వచించలేనప్పుడు వైషమ్యాన్ని కొలవటానికి దిగువ సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తాం.

$$SKP = \frac{3(A.M. - Median)}{\sigma}$$

సిద్ధాంతపరంగా ఈ గుణకము విలువ ± 1 మారుతూ ఉంటుంది. రెండవ సూత్రం ఉపయోగించినప్పుడు దీని విలువ ± 3 మధ్య మారుతూ ఉంటుంది.

Steps :

1. ఇచ్చిన పరిమాణాల నుండి ఏదో ఒక పరిమాణాన్ని ఊహించిన సగటుగా తీసుకోండి (X)
2. ఊహించిన సగటును ప్రతి పరిమాణానికి పోల్చి విచలనాలను కనుగొనండి (dx)
3. విచలనాలను వర్గం చేయండి (dx^2)
4. ఊహించిన సగటు నుండి విచలనాలను మొత్తం చేయండి (Σdx)
5. విచలనాల వర్గాలను మొత్తం చేయండి (Σdx^2)
6. దిగువ సూత్రాలను ఉపయోగించండి $A.M. = X + \frac{\Sigma dx}{n}$ $S.D.$ (or) $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma dx}{n}\right)^2}$
7. బాహుళకాన్ని కనుగొనండి (Z)
8. కారల్ పియర్సన్స్ వైషమ్యగుణక సూత్రాన్ని ఉపయోగించండి. $SKP = \frac{A.M. - Mode\ (Z)}{\sigma\ (or)\ S.D.}$

వ్యక్తిగత శ్రేణులు

1. దిగువ దత్తాంశము నుండి కారల్ పియర్ సన్స్ వైషమ్య గుణకమును లెక్కించండి.

పరిమాణాలు (m) : 5 10 15 20 25 20 30

జవాబు : X = 20

పరిమాణాలు (m)	ఊహించిన సగటు నుండి విచలనాలు (dx)	dx^2
5	- 15	225
10	- 10	100

15	- 5	25
20	0	0
25	+ 5	25
20	0	0
30	+ 10	100
	- 30	$\sum dx^2 = 475$
	+ 15	
	$\Sigma dx = -15$	

$$A.M. = X \pm \frac{\Sigma dx}{n} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{n} - \left(\frac{\sum dx}{n}\right)^2}$$

$$= 20 \pm \frac{-15}{7} \qquad = \sqrt{\frac{475}{7} - \left(\frac{-15}{7}\right)^2}$$

$$= 20 - 2.14 \qquad = \sqrt{67.86 - (-2.14)^2}$$

$$= 17.86 \qquad = \sqrt{67.86 - 4.58} = \sqrt{63.28} = 7.96$$

బాహుళకము : ఇచ్చిన దత్తాంశములో ఏ పరిమాణం అధికసార్లు వస్తుందో దానిని బాహుళకం అంటాం. పై దత్తాంశంలో పరిమాణం 20 రెండుసార్లు వచ్చింది కాబట్టి బాహుళకం = 20

$$SKP = \frac{A.M. - Mode(Z)}{S.D.}$$

$$= \frac{17.86 - 20}{7.96} = \frac{-2.14}{7.96} = -.27$$

ఈ దత్తాంశ వైషమ్యము ఋణాత్మకము.

సూత్ర వివరణ :

A.M. = అంక మధ్యమము

X = ఊహించిన సగటు

$\sum dx$ = ఊహించిన సగటునుండి వచ్చిన విచలనాల మొత్తం

n = రాసుల సంఖ్య

σ = ప్రామాణిక విచలనం

$\sum dx^2$ = ఊహించిన సగటునుండి వచ్చిన విచలనాల వర్గాల మొత్తం

SKP = కారల్ పియర్ సన్స్ వైషమ్యగుణకం

Z = బాహుళకం

విచ్ఛిన్న శ్రేణులు

Steps :

1. ఇచ్చిన పరిమాణాలలో ఏదో ఒక పరిమాణాన్ని ఊహించిన సగటుగా తీసుకోండి (X)
2. ఊహించిన సగటును ప్రతి పరిమాణానికి పోల్చిచూసి విచలనాలను కనుగొనండి (dx)
3. వచ్చిన విచలనాలను సంబంధిత పౌనఃపున్యాలచే గుణించండి (fdx)
4. fdx వరుసలో ఉన్న సంఖ్యలను మొత్తం చేయండి (Σfdx)
5. fdx విలువలను వర్గం చేయండి (fdx^2)
6. fdx^2 వరుసలో ఉన్న విలువలను మొత్తం చేయండి (Σfdx^2)
7. పౌనఃపున్యాల మొత్తం చేయండి (n)
8. వర్గీకరణ పట్టి విశ్లేషణ పట్టీలను తయారుచేసి బాహుళకమును కనుగొనండి (z)
9. కారల్ పియర్ సన్స్ వైషమ్య గుణకాన్ని లెక్కించండి $SKP = \dfrac{A.M. - Mode}{S.D.}$

సూత్ర వివరణ : A.M. = అంక మధ్యమము

X = ఊహించిన సగటు

Σfdx = ఊహించిన సగటునుండి వచ్చిన విచలనాలను వాటి పౌనఃపున్యాలచే గుణించగా వచ్చిన మొత్తం

Σfdx^2 = ఊహించిన సగటునుండి వచ్చిన విచలనాల వర్గాలను వాటి పౌనఃపున్యాలచే గుణించగా వచ్చిన మొత్తం

n = పౌనఃపున్యాల మొత్తం

S.D. = ప్రామాణిక విచలనం

ఉదా 2 : దిగువ దత్తాంశమునుండి కారల్ పియర్సన్స్ వైషమ్య గుణకమును లెక్కించండి.

విలువ	10	20	30	40	50	60	70
పౌనఃపున్యము	1	5	12	22	17	9	4

జవాబు :

విలువ (m)	పౌనఃపున్యము (f)	X = 40 ఊహించిన సగటు నుండి విచలనాలు (dx)	fdx	dx^2	fdx^2
10	1	- 30	- 30	900	900
20	5	- 20	- 100	400	2000
30	12	- 10	- 120	100	1200
40	22	0	0	0	0
50	17	+ 10	+ 170	100	1700
60	9	+ 20	+ 180	400	3600
70	4	+ 30	+ 120	900	3600

n = 70

$$\begin{array}{r} +\ 470 \\ -\ 250 \\ \hline \Sigma fdx = 220 \end{array}$$

Σfdx 13000

∴ అంకమధ్యమము లెక్కింపుము : $A.M. = X + \frac{\Sigma fdx}{n}$

$$= 40 + \frac{220}{70} = 40 + 3.14 = 43.14$$

ప్రామాణిక విచలనాలను లెక్కింపుము :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma dx}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{13000}{70} - \left(\frac{220}{70}\right)^2} = \sqrt{18571 - (3.14)^2}$$

$$= \sqrt{18571 - 9.86} = \sqrt{17585} = 13.26$$

బాహుళకం లెక్కింపు :

వర్గీకృత పట్టీ

విలువ	పౌనఃపున్యము (1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
10	1	6		18		
20	5		17		39	
30	12	34				51
40	22		39	48		
50	17	26			30	
60	9		13			
70	4					

విశ్లేషణ పట్టీ

కాలం నెంబర్లు	అధిక పౌనఃపున్యము గల అంశాలు 10	20	30	40	50	60	70
1				✓			
2			✓	✓			
3				✓	✓		
4				✓	✓	✓	
5		✓	✓	✓			
6			✓	✓	✓		
		1	3	6	3	1	

బాహుళకము 40 ఎందువలననగా విశ్లేషణ పట్టీలో ఇది అన్నిటికంటే అత్యధికసార్లు అంటే 6 సార్లు వచ్చింది కాబట్టి.

$$SKP = \frac{A.M. - Mode}{\sigma}$$

$$= \frac{43.14 - 40}{13.26} = \frac{3.14}{13.26} = 0.24$$

ఈ దత్తాంశానికి వైషమ్యము ధనాత్మకము

సూత్ర వివరణ :

A.M. = అంకమధ్యమము

X = ఊహించిన సగటు

Σfdx = ఊహించిన సగటునుండి వచ్చిన విచలనాలను వాటియొక్క పౌనఃపున్యాలతో గుణించగా వచ్చిన మొత్తం

n = పౌనఃపున్యాల మొత్తం

σ = ప్రామాణిక విచలనం

Σfdx^2 = ... న సగటునుండి వచ్చిన విచలనాల వర్గాల మొత్తం

SKP = ... ర్సన్స్ వైషమ్యగుణకం

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు

Steps :

1. ప్రతి తరగతికి మధ్య విలువను కనుగొనండి (M.V.)
2. మధ్య విలువలలో ఏదో ఒక మధ్యవిలువను ఊహించిన సగటుగా తీసుకోండి (X)
3. ఊహించిన సగటును ప్రతి మధ్యవిలువకు పోల్చిచూచి విచలనాలను కనుగొనండి (dx)
4. వచ్చిన విచలనాలను వాటియొక్క పౌనఃపున్యాలచే గుణించండి (fdx)
5. fdx వరుసలో ఉన్న సంఖ్యలను మొత్తం చేయండి (Σfdx)
6. dx విలువలను వర్గం చేయండి (dx^2)
7. వర్గం చేయగా వచ్చిన విలువలను సంబంధిత పౌనఃపున్యాలచే గుణించండి (fdx^2)
8. fdx^2 వరుసలో ఉన్న సంఖ్యలను మొత్తం చేయండి (Σfdx^2)
9. పౌనఃపున్యాలను మొత్తం చేయండి (n)
10. బాహుళకాన్ని కనుగొనండి (z)
11. దిగువ సూత్రాన్ని ఉపయోగించండి

$$SKP = \frac{A.M. - Mode\ (Z)}{S.D.}$$

సూత్ర వివరణ :

A.M. = అంకమధ్యమము

X = ఊహించిన సగటు

Σfdx = ఊహించిన సగటు నుండి వచ్చిన విచలనాలను వాటియొక్క పౌనఃపున్యాలచే గుణించగా వచ్చిన మొత్తం

Σfdx^2 = ఊహించిన సగటు నుండి వచ్చిన విచలనాల వర్గాలను వాటి పౌనఃపున్యాలచే గుణించగా వచ్చిన మొత్తం

n = పౌనఃపున్యాల మొత్తం

SKP = కారల్ పియర్సన్స్ వైషమ్య గుణకము

ఉదా. 3: దిగువ దత్తాంశము నుండి కారల్ పియర్సన్స్ వైషమ్య గుణకమును లెక్కించండి.

తరగతి	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
పౌనఃపున్యము	6	12	22	48	56	32	18	6

జవాబు :

తరగతి (C.I)	పౌనఃపున్యము (f)	మధ్య విలువ (M.V.)	x= 35 ఊహించిన సగటు నుండి విచలనాలు (dx)	i = 10 dx1	fdx^1	dx^{1^2}	fdx^{1^2}
0 - 10	6	5	- 30	- 3	-18	9	54
10 - 20	12	15	- 20	- 2	-24	4	48
20 - 30	22	25	-10	- 1	-22	1	22
30 - 40	48	35	0	0	0	0	0
40 - 50	56	45	+10	+1	+56	1	56
50 - 60	32	55	+20	+2	+64	4	128
60 - 70	18	65	+30	+3	+54	9	162
70 - 80	6	75	+40	+4	+24	16	96
	n = 200				+198		$\Sigma fdx^{1^2} = 566$
					- 64		
					$\Sigma fdx^1 = 134$		

అంకమధ్యమము లెక్కింపు : $A.M. = X + \frac{\Sigma fdx^1}{n} X\ i$

$$= 35 + \frac{134}{200} X\ 10 = 35 + \frac{1340}{200} = 35 + 67 = 102$$

ప్రామాణిక విచలనం లెక్కింపుము :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fdx^{1^2}}{n} - \left(\frac{\Sigma dx^1}{n}\right)^2} \ x\ i = \sqrt{\frac{566}{200} - \left(\frac{134}{200}\right)^2} \ x\ 10$$

$$= \sqrt{2.83-(.67)^2} \times 10 = \sqrt{2.83-.45} \times 10 = \sqrt{2.38} \times 10 = 1.54 \times 10 = 15.4$$

బాహుళకం లెక్కింపు :

వర్గీకృత పట్టీ

తరగతి (C.I)	పౌనఃపున్యము (f)(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0 - 10	6	18				
10 - 20	12		34	40		
20 - 30	22	70			82	
30 - 40	f_0 48		104	136		126
40 - 50	f_1 56	88			106	
50 - 60	f_2 32		50			56
60 - 70	18	24				
70 - 80	6					

విశ్లేషణ పట్టీ

కాలం నెంబర్లు	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	80-70
				అధిక పౌనఃపున్యము గల అంశాలు				
1					✓			
2					✓	✓		
3				✓	✓			
4				✓	✓	✓		
5					✓	✓	✓	
6			✓	✓	✓			
			1	3	6	3	1	

బాహుళకము **40-50** ఎందువలననగా విశ్లేషణ పట్టీలో అత్యధికసార్లు అంటే 6 సార్లు వచ్చింది కాబట్టి.

అంతర్వేశ సూత్రాన్ని ఉపయోగించిన : $Z = l_1 + \frac{f_1 + f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}(l_2 - l_1)$

$$= 40 + \frac{56-48}{2 \times 56 - 48 - 32}(50-40)$$

$$= 40 + \frac{8}{112-48-32}(10) = 40 + \frac{80}{32} = 40 + 2.5 = 42.5$$

$SKP = \frac{A.M. - Mode}{S.D.} = \frac{102-42.5}{15.4} = 3.86$ దత్తాంశము యొక్క వైషమ్యము ధనాత్మకము

సూత్ర వివరణ :

A.M. = అంకమధ్యమము

X = ఊహించిన సగటు

Σfdx^1 = ఊహించిన సగటునుండి వచ్చిన సోపాన విచలనాలను వాటి పౌనఃపున్యాలచే గుణించగా వచ్చిన మొత్తం.

Σfdx^{1^2} = ఊహించిన సగటు నుండి వచ్చిన సోపాన విచలనాల వాటి పౌనఃపున్యాలచే గుణించగా వచ్చిన వర్గాల మొత్తం

n = పౌనఃపున్యాల మొత్తం

Z = బాహుళకం

l_1 = బాహుళకపు తరగతి దిగువ అవధి

l_2 = బాహుళకపు తరగతి ఎగువ అవధి

f_1 = బాహుళకపు తరగతి సామాన్య పౌనఃపున్యము

f_0 = బాహుళకపు తరగతి సామాన్య పౌనఃపున్యము వరుసలో పైనున్న అంశం

f_2 = బాహుళకపు తరగతి సామాన్య పౌనఃపున్యము వరుసలో దిగువనున్న అంశం

SKP = కారల్ పియర్సన్స్ వైషమ్య గుణకము

ఉదా 4 : దిగువ దత్తాంశము నుండి వైషమ్య గుణకాన్ని లెక్కించండి.

మార్కులు (ఆపైన)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
విద్యార్థుల సంఖ్య	150	140	100	80	80	70	30	14	0

జవాబు :

మార్కులు (C.I)	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)	మధ్య విలువ (M.V.)	x= 45 ఊహించిన సగటు నుండి విచలనాలు (dx)	i = 10 (dx^1)	fdx^1	dx^{1^2}	fdx^{1^2}
0 - 10	10	5	- 40	- 4	-40	16	160
10 - 20	40	15	- 30	- 3	-120	9	360
20 - 30	20	25	-20	- 2	-40	4	80
30 - 40	0	35	-10	-1	0	1	0
40 - 50	10	45	0	0	0	0	0
50 - 60	40	55	+10	+1	+40	1	40
60 - 70	16	65	+20	+2	32	4	64
70 - 80	14	75	+30	+3	+54	9	126
80 - 90	0	85	+40	+4	0	16	0
	150				+ 126		$\Sigma fdx^{1^2} = 830$
					- 200		
					$\Sigma fdx^1 = -74$		

అంకమధ్యమము లెక్కింపు : $A.M. = X + \frac{\Sigma fdx^1}{n} X\, i$

$= 45 + \frac{-74}{150} \times 10 = 45 + \frac{-740}{150}$

$= 45 - 4.93 = 4007$

ప్రామాణిక విచలనం లెక్కింపు : $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fdx^{1^2}}{n} - \left(\frac{\Sigma fdx^1}{n}\right)^2} \; X\, i$

$\sqrt{\frac{830}{150} - \left(\frac{-74}{150}\right)^2} \times 10$

$= \sqrt{5.53 - (-.49)^2} \times 10 = \sqrt{5.53 - .24} \times 10$

$= \sqrt{5.29} \times 10 = 2.3 \times 10 = 23$

బహుళకం లెక్కింపు :

వర్గీకృత పట్టీ

తరగతి (C.I)	పౌనఃపున్యము (f)1	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0 - 10	10	50		70		
10 - 20	40		60		60	
20 - 30	20	20				30
30 - 40	0		10	50		
40 - 50	10	50			66	
50 - 60	40		56			70
60 - 70	16	30		30		
70 - 80	14		14			
80 - 90	0					

విశ్లేషణ పట్టీ

కాలం నెంబర్లు	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	60-70
	అధిక పౌనఃపున్యము గల అంశాలు							
1		✓				✓		
2	✓	✓			✓	✓		
3		✓	✓					
4	✓	✓	✓					
5					✓	✓	✓	
6						✓	✓	✓
	2	4	2		2	4	2	1

బాహుళకము ద్విబాహుళకము అవుతుంది. ఎందువలననగా 10 - 20 మరియు 50 - 60 తరగతి అంతరాలు, ఒక్కొక్కటి 4 సార్లు చొప్పున వచ్చింది కాబట్టి.

బాహుళకము ద్విబాహుళకము అయినప్పుడు బహుళకమును కనుగొనుటకు సూత్రం Z = 3 మధ్యగతము - 2 అంకమధ్యమము

మధ్యగతం లెక్కింపు :

తరగతి (C.I)	(f)	సంచిత పౌన: పున్యము (cf)
0 - 10	10	10
10 - 20	40	50
20 - 30	20	70
30 - 40	0	70
40 - 50	10	80
50 - 60	40	120
60 - 70	16	136
70 - 80	14	150
80 - 90	0	150

m = Size of $\left(\frac{n}{2}\right)$ వ అంశం = Size of $\left(\frac{150}{2}\right)$ వ అంశం

= Size of 75 వ అంశం

75వ అంశం సంచిత పౌనఃపున్యం 80లో ఉంది కనుక మధ్యగత తరగతి 40 - 50. అంతర్నివేశ సూత్రాన్ని ఉపయోగించిన

$$M = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f_1}(m - c)$$

$$= 40 + \frac{50-40}{10}(75-70)$$

$$= 40 + \frac{10}{10}(5) = 40 + \frac{50}{10} = 40 + 5 = 45$$

బాహుళకం ద్విబాహుళకం అయింది కాబట్టి దిగువ సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తున్నాము.

$$SKP = \frac{3(\text{Mean} - \text{Median})}{\text{S.D.}} = \frac{3(40.07 - 45)}{23}$$

$$= \frac{123.21 - 135}{23} = \frac{-11.79}{23} = -.51$$

ఈ దత్తాంశము యొక్క వైషమ్య గుణకము రుణాత్మకము

ఉదా. 5 : దిగువ దత్తాంశమునుండి కారల్ పియర్సన్స్ వైషమ్యగుణకాన్ని లెక్కించండి.

వయస్సు	20 - 29	30 - 39	40 - 49	50 - 59	60 -69	70 - 79
వ్యక్తుల సంఖ్య	25	35	40	90	75	60

జవాబు :

వయస్సు (C.I)	వ్యక్తుల సంఖ్య (f)	మధ్య విలువ (M.V.)	x= 44.5 ఊహించిన సగటు నుండి విచలనాలు (dx)	i = 10 dx^1	fdx^1	dx^{1^2}	fdx^{1^2}
19.5 - 29.5	25	24.5	- 20	- 2	-50	4	100
29.5 - 39.5	35	34.5	- 10	- 1	-35	1	35
39.5 - 49.5	40	44.5	0	0	0	0	0
49.5 - 59.5	90	54.5	+10	+1	90	1	90
59.5 - 69.5	75	64.5	+20	+2	150	4	300
69.5 - 79.5	60	74.5	+30	+3	180	9	540
	325				+ 420		$\Sigma fdx^{1^2} = 1065$
					- 85		
					$\Sigma fdx^1 = 335$		

అంకమధ్యమము లెక్కింపు : $A.M. = X + \frac{\Sigma fdx^1}{n} X\ i$

$$= 44.5 + \frac{335}{325} x 10 = 44.5 + \frac{3350}{325}$$

$$= 44.5 + 10.31 = 54.81$$

ప్రామాణిక విచలనం లెక్కింపు : $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fdx^{1^2}}{n} - \left(\frac{\Sigma dx^1}{n}\right)^2}\ x\ i$

$$= \sqrt{\frac{1065}{329} - \left(\frac{335}{329}\right)^2}\ x\ 10 = \sqrt{3.24 - (1.02)^2}\ x\ 10$$

$$= \sqrt{3.24 - 1.04}\ x\ 10 = \sqrt{2.2}\ x\ 10 \quad = 1.48 \times 10 = 14.8$$

బాహుళకము లెక్కింపు : వర్గీకృత పట్టిక

వయస్సు (C.I)	వ్యక్తుల సంఖ్య (f)1	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
19.5 - 29.5	25	60				
29.5 - 39.5	35			100		
39.5 - 49.5	40		75			
49.5 - 59.5	90	130			165	
59.5 - 69.5	75		165			205
69.5 - 79.5	60	135		225		

విశ్లేషణ పట్టీ

కాలం నెంబర్లు	అధిక పౌనఃపున్యము గల అంశాలు					
	19.5-29.5	29.5-39.5	39.5-49.5	49.5-59.5	59.5-69.5	69.5-79.5
1				✓		
2					✓	✓
3				✓	✓	
4				✓	✓	✓
5		✓	✓	✓		
6			✓	✓	✓	
		1	2	5	4	2

బాహుళకపు తరగతి 49.5 - 59.5 అంతర్నివేశ సూత్రాన్ని ఉపయోగించిన :

$$Z = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}(l_2 - l_1)$$

$$= 49.5 + \frac{90-40}{2x90-40-75}(59.5 - 49.5)$$

$$= 49.5 + \frac{50}{180-115}(10)$$

$$= 49.5 + \frac{500}{65} = 49.5 + 7.69 = 57.19$$

$$SKP = \frac{A.M. - Z}{S.D.} = \frac{54.81 - 57.19}{14.8} = -\frac{2.38}{14.8} = (-).16$$

ఈ దత్తాంశానికి వైషమ్యము ఋణాత్మకము

ఉదా. 6 : దిగువ దత్తాంశానికి లెక్కించవలసినవి.

	పంపిణీ A	పంపిణీ B
అంకమధ్యమము	100	90
మధ్యగతము	90	80
ప్రామాణిక విచలనము	10	10

a) ఏది ఎక్కువ విచరణము కలిగి ఉన్నది; b) SKP వైషమ్య గుణకాన్ని లెక్కించండి.

విచరణ గుణకము $C.V. = (A)\ \frac{\sigma}{A.M.} \times 100 = \frac{10}{100} \times 100 = 10$

$$= (B)\ \frac{\sigma}{A.M.} \times 100 = \frac{10}{90} \times 100 = 11.1$$

a) B పంపిణీ ఎక్కువ విచరణకలిగి ఉన్నది. ఎందువలననగా B విచరణ గుణకము. A విచరణ గుణకము కన్నా ఎక్కువ ఉన్నది కాబట్టి.

$$SKP = A \text{ పంపిణీ } = \frac{3(\text{Mean} - \text{Meadian})}{\text{S.D.}} = \frac{3(100 - 90)}{10}$$

$$= \frac{(300 - 270)}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

$$B \text{ పంపిణీ } = \frac{3\,(90 - 80)}{10}$$

$$\left(\frac{270 - 240}{10}\right) = \frac{30}{10} = 3$$

రెండు దత్తాంశాల వైషమ్య గుణకము ధనాత్మకము.

బౌలీ వైషమ్య గుణకము

ఎ.యల్. బౌలీ సూచించిన వైషమ్య గుణకము చతుర్థాంశాలు మరియు మధ్యగతంపై ఆధారపడి ఉంటుంది. సౌష్టవ విభాజనంలో ప్రథమ, తృతీయ చతుర్థాంశాలు మధ్యగతానికి సమానదూరంలో ఉంటాయి.

బౌలీ వైషమ్య గుణకాన్ని దిగువ సూత్రాన్ని ఆధారంగా లెక్కిస్తారు

$$SKb = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

సూత్ర వివరణ

SKb = బౌలీ వైషమ్య గుణకము

Q_3 = ఎగువ చతుర్థాంశము

Q_1 = దిగువ చతుర్థాంశము

M = మధ్యగతము

దత్తాంశంలో వివృతాంత తరగతులు ఉన్నప్పుడు బౌలీ వైషమ్య గుణకం ప్రత్యేకంగా ఉపయోగపడుతుంది. ఈ వైషమ్య గుణకం విలువ ± 1 మధ్య మారుతూ ఉంటుంది.

వ్యక్తిగత శ్రేణులు

Steps :

1. దత్తాంశాన్ని ఆరోహణా క్రమంలో ఏర్పాటు చేయాలి.
2. **Q_1 విలువను లెక్కించాలి.**
3. Q_3 విలువను లెక్కించాలి.
4. మధ్యగత విలువను లెక్కించాలి.
5. [illegible]

$$SKb = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

ఉదా 7 : మార్కులు : 10 15 20 25 15 10 30

దత్తాంశాన్ని ఆరోహణా క్రమములో ఏర్పాటు చేయగా

మార్కులు (m)
10 —
10
15
15
20
25
30

M = Size of $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ వ అంశం = Size of $\left(\frac{7+1}{2}\right)$ వ అంశం

= Size of $\left(\frac{8}{2}\right)$ వ అంశం = Size of4వ అంశం

ఆరోహణా క్రమము దత్తాంశంలో 4వ అంశం 15

$\therefore$ మధ్యగతము = 15

Q_1 = Size of $\left(\frac{n+1}{4}\right)$ వ అంశం = Size of $\left(\frac{7+1}{4}\right)$ వ అంశం

= Size of $\left(\frac{8}{4}\right)$ వ అంశం = Size of 2 వ అంశం

ఆరోహణా క్రమము దత్తాంశంలో 2వ అంశం 10

$\therefore$ $Q_1 = 10$

Q_3 = Size of $3\left(\frac{n+1}{4}\right)$ వ అంశం = Size of $3\left(\frac{7+1}{4}\right)$ వ అంశం

= Size of $3\left(\frac{8}{4}\right)$ వ అంశం = Size of $\left(\frac{24}{4}\right)$ వ అంశం

= Size of 6 వ అంశం

ఆరోహణా క్రమము దత్తాంశంలో 6 వ అంశం 25

$\therefore$ $Q_3 = 25$

$$Skb = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} = \frac{25 + 10 - 2 \times 15}{25 - 10} = \frac{25 + 10 - 30}{15} = \frac{35 - 30}{15} = \frac{5}{15} = .33$$

వైషమ్య గుణకము ధనాత్మకము

సూత్ర వివరణ : Q_1 = దిగువ చతుర్థాంశము Q_3 = ఎగువ చతుర్థాంశము n = రాసుల సంఖ్య M = మధ్యగతము

విచ్ఛిన్న శ్రేణులు

Steps :

1. దత్తాంశాన్ని ఆరోహణా క్రమములో ఏర్పాటు చేయాలి.
2. Q_1 విలువలను లెక్కించండి.
3. Q_3 విలువలను లెక్కించండి.
4. మధ్యగత విలువను లెక్కించండి. M
5. దిగువ సూత్రాన్ని ఉపయోగించండి

$$SKb = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

ఉదా 8 : దిగువ దత్తాంశమునుండి బౌలీ వైషమ్య గుణకమును లెక్కించండి

మార్కులు	0	10	20	30	40	50	60	70	80
విద్యార్థుల సంఖ్య	10	15	8	12	30	35	20	18	3

జవాబు :

మార్కులు (m)	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)	సంచిత పౌనఃపున్యము (cf)
0	10	10
10	15	25
20	8	33
30	12	45
40	30	75
50	35	110
60	20	130
70	18	148
80	3	151

Q_1 = Size of $\left(\frac{n+1}{4}\right)$ వ అంశం = Size of $\left(\frac{151+1}{4}\right)$ వ అంశం = Size of $\left(\frac{152}{4}\right)$ వ అంశం

= Size of 38 వ అంశం

38వ అంశం సంచిత పౌనఃపున్యము 45లో ఉన్నది. దానికి సంబంధించిన పరిమాణం 30

$\therefore Q_1 = 30$

M = Size of $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ వ అంశం = Size of $\left(\frac{151+1}{2}\right)$ వ అంశం

= Size of $\left(\frac{152}{2}\right)$ వ అంశం = Size of 76 వ అంశం

12)

76వ అంశం సంచిత పౌనఃపున్యములో 110లో ఉంది. దానికి సంబంధించిన పరిమాణం 50

$\therefore \quad M = 50$

$Q_3 =$ Size of $3\left(\frac{n+1}{4}\right)$ వ అంశం

$=$ Size of $3\left(\frac{151+1}{4}\right)$ వ అంశం

$=$ Size of $3\left(\frac{152}{4}\right)$ వ అంశం

$=$ Size of $\left(\frac{456}{4}\right)$ వ అంశం

$=$ Size of 114 వ అంశం

114వ అంశం సంచిత పౌనఃపున్యము 130లో ఉంది. సంబంధిత పరిమాణం 60.

$\therefore \quad Q_3 = 60$

$$SKb = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{60 + 30 - 2 \times 50}{60 - 30}$$

$$= \frac{90 - 100}{30} = \frac{-10}{30} = -.33$$

దత్తాంశ వైషమ్యగుణకము రుణాత్మకము

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు

Steps :

1. దత్తాంశాన్ని ఆరోహణా క్రమములో ఏర్పాటు చేయండి
2. Q_3 విలువలను కనుగొనండి.
3. Q_1 విలువలను కనుగొనండి.
4. మధ్యగతం విలువను లెక్కించండి.
5. దిగువ సూత్రాన్ని ఉపయోగించండి

$$SKb = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

ఉదా 9 : దిగువ దత్తాంశము నుండి బౌలీ వైషమ్య గుణకమును లెక్కించండి

వేతనాలు	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
వ్యక్తుల సంఖ్య	2	5	7	13	21	16	8

జవాబు

వేతనాలు (C.I.)	వ్యక్తుల సంఖ్య (f)	సంచిత పౌనఃపున్యము (cf)
30-40	2	2
40-50	5	7
50-60	7	14
60-70	13	27
70-80	21	48
80-90	16	64
90-100	8	72

Q_1 లెక్కింపు

Q_1 = Size of $\left(\frac{n}{4}\right)$ వ అంశం = Size of $\left(\frac{72}{4}\right)$ వ అంశం

= Size of 18 వ అంశం. 18వ అంశం సంచిత పౌనఃపున్యములో 27లో ఉంది కనుక దానికి సంబంధించిన తరగతి 60-70

$\therefore$ Q_1 తరగతి = 60 - 70

అంతర్వేశ సూత్రం ఉపయోగించిన

$$Q_1 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f_1}(q_1 - c)$$

$$= 60 + \frac{70-60}{13}(18-14)$$

$$= 60 + \frac{10}{13}(4) = 60 + \frac{40}{13}$$

$$= 60 + 3.08 = 63.08$$

మధ్యగతం లెక్కింపు :

M = Size of $\left(\frac{n}{2}\right)$ వ అంశం = Size of $\left(\frac{72}{2}\right)$ వ అంశం

= Size of 36 వ అంశం

36వ అంశం సంచిత పౌనఃపున్యములో 48లో ఉన్నది. కనుక దానికి సంబంధిత తరగతి 70-80

$\therefore$ మధ్యతరగతి = 70 - 80

అంతర్వేశ సూత్రం ఉపయోగించిన

$$M = l_1 + \frac{l_2 + l_1}{f_1}(m - c)$$

$$= 70 + \frac{80 - 70}{21}(36 - 27)$$

$$= 70 + \frac{10}{21}(9) = 70 + \frac{90}{21}$$

$$= 70 + 4.29 = 74.29$$

Q_3 లెక్కింపు:

Q_3 = Size of $3\left(\frac{n}{4}\right)$ వ అంశం = Size of $3\left(\frac{72}{4}\right)$ వ అంశం

= Size of $\left(\frac{216}{4}\right)$ వ అంశం = Size of 54 వ అంశం

54వ అంశం సంచిత పౌనఃపున్యము 64లో ఉంది. సంబంధిత తరగతి 80-90

$\therefore$ Q_3 తరగతి = 54

అంతర్నివేశ సూత్రం ఉపయోగించిన

$$Q_3 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f_1}(q_3 - c)$$

$$= 80 + \frac{90 - 80}{16}(54 - 48)$$

$$= 80 + \frac{10}{16}(6) = 80 + \frac{60}{16}$$

$$= 80 + 3.75 = 83.75$$

$$SKb = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} = \frac{83.75 + 63.08 - 2 \times 74.29}{83.75 - 63.08}$$

$$= \frac{14683 - 14858}{20.67} = \frac{-1.75}{20.67} = -.09$$

దత్తాంశ వైషమ్యము ధనాత్మకము

సూత్ర వివరణ :

M = మధ్యగతము

l_1 = మధ్యగతము, Q_1, Q_3 తరగతుల దిగువ అవధులు

l_2 = మధ్యగతము, Q_1, Q_3 తరగతుల ఎగువ అవధులు

f_1 = మధ్యగతము, Q_1, Q_2 తరగతుల సమాన్య పౌనఃపున్యము

m = Size of $\left(\frac{n}{2}\right)$ అంశం

q_1 = Size of $\left(\frac{n}{4}\right)$ అంశం

q_2 = Size of వ $3\left(\frac{n}{4}\right)$ అంశం

c = మధ్యగతము, Q_1, Q_3 తరగతుల సంచిత పౌనఃపున్యము వరసలో పైనున్న అంశం

ఉదా 10 : దిగువ దత్తాంశము నుండి బౌలీ వైషమ్య గుణకమును లెక్కించండి

తరగతులు అంతరాలు	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89
పౌనఃపున్యము	5	9	14	20	25	15	8	4

జవాబు

తరగతి అంతరాలు (C.I.)	పౌనఃపున్యము (f)	సంచిత పౌనఃపున్యము (cf)
9.5 - 19.5	5	5
19.5 - 29.5	9	14
29.5 - 39.5	14	28
39.5 - 49.5	20	48
49.5 - 59.5	25	73
59.5 - 69.5	15	88
69.5 - 79.5	8	96
79.5 - 89.5	4	100

Q_1 = Size of $\left(\frac{100}{4}\right)$ వ అంశం = Size of 25 వ అంశం

25వ అంశం సంచిత పౌనఃపున్యము 28లో ఉన్నది దానికి సంబంధించిన తరగతి 29.5 - 39.5

$\therefore$ Q_1 తరగతి = 29.5 - 39.5

అంతర్వేశ సూత్రం ఉపయోగించిన :

$$Q_1 = l_1 + \frac{l_2 + l_1}{f_1}(q_1 - c)$$

$$= 29.5 + \frac{39.5 - 29.5}{14}(25 - 14)$$

$$= 29.5 + \frac{10}{14}(11) = 29.5 + \frac{110}{14}$$

$$= 29.5 + 7.86 = 37.36$$

మధ్యగతం లెక్కింపు :

M = Size of $\left(\frac{n}{2}\right)$ వ అంశం = Size of $\left(\frac{100}{2}\right)$ వ అంశం

$= \text{Size of } 50$ వ అంశం

50వ అంశం సంచిత పౌనఃపున్యములో 73లో ఉన్నది. సంబంధిత తరగతి **49.5 - 59.5**

$\therefore$ మధ్యతరగతి $= 49.5 - 59.5$

అంతర్నివేశ సూత్రం ఉపయోగించిన

$$M = l_1 + \frac{l_2 + l_1}{f_1}(m - c)$$

$$= 49.5 + \frac{59.5 - 49.5}{25}(50 - 48)$$

$$= 49.5 + \frac{10}{25}(2) = 49.5 + \frac{20}{25}$$

$$= 49.5 + .8 = 50.3$$

Q_3 లెక్కింపు :

$$Q_3 = \text{Size of } 3\left(\frac{n}{4}\right) \text{ వ అంశం} = \text{Size of } 3\left(\frac{100}{4}\right) \text{ వ అంశం}$$

$$= \text{Size of } \left(\frac{300}{4}\right) \text{ వ అంశం} = \text{Size of } 75 \text{ వ అంశం}$$

75వ అంశం సంచిత పౌనఃపున్యము 88లో ఉంది. సంబంధిత తరగతి **59.5 - 69.5**

$\therefore$ Q_3 తరగతి $= 59.5 - 69.5$

అంతర్నివేశ సూత్రం ఉపయోగించిన

$$Q_3 = l_1 + \frac{l_2 + l_1}{f_1}(q_3 - c)$$

$$= 59.5 + \frac{69.5 - 59.5}{15}(75 - 73)$$

$$= 59.5 + \frac{10}{15}(2) = 59.5 + \frac{20}{15}$$

$$= 59.5 + 1.3 = 60.8$$

$$Skb = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} = \frac{60.8 + 37.36 - 2 \times 50.3}{60.8 - 37.36}$$

$$= \left(\frac{98.16 - 100.6}{23.44}\right) = \frac{-2.44}{23.44} = -.10$$

ఈ దత్తాంశ వైషమ్యము ఋణాత్మకము

ఉదా 11 : మధ్యగతం, చతుర్థాంశాలపై ఆధారపడిన వైషమ్యగుణకాన్ని కనుగొనండి

మార్కులు (లోపు)	10	20	30	40	50	60	70
విద్యార్థుల సంఖ్య	6	17	31	51	66	75	80

జవాబు

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య	సంచిత పౌనఃపున్యము (cf)
0 - 10	6	6
10 - 20	11	17
20 - 30	14	31
30 - 40	20	51
40 - 50	15	66
50 - 60	9	75
60 - 70	5	80

Q_1 లెక్కింపు :

Q_1 = Size of $\left(\frac{n}{4}\right)$ వ అంశం

= Size of $\left(\frac{80}{4}\right)$ వ అంశం

= Size of 20 వ అంశం సంచిత పౌనఃపున్యములో

20వ అంశం సంచిత పౌనఃపున్యము 31లో ఉన్నది. దానికి సంబంధించిన తరగతి 20 - 30 లో ఉంది.

$\therefore$ Q_1 తరగతి = 20 - 30

అంతర్నివేశ సూత్రాన్ని ఉపయోగించిన :

$$Q_1 = l_1 + \frac{l_2 + l_1}{f_1}(q_1 - c)$$

$$= 20 + \frac{30-20}{14}(20-17)$$

$$= 20 + \frac{10}{14}(3) \quad = 20 + \frac{30}{14} \qquad = 20 + 2.14 = 22.14$$

మధ్యగతం లెక్కింపు :

M = Size of $\left(\frac{n}{2}\right)$ వ అంశం = Size of $\left(\frac{80}{2}\right)$ వ అంశం

= Size of 40 వ అంశం

40వ అంశం సంచిత పౌనఃపున్యములో 51లో ఉన్నది. సంబంధిత తరగతి 30 - 40

$\therefore$ మధ్యతరగతి = 30 - 40

అంతర్నివేశ సూత్రం ఉపయోగించిన

$$M = l_1 + \frac{l_2 + l_1}{f}(m - c)$$

$$= 30 + \frac{40-30}{20}(40-31)$$

$$= 30 + \frac{10}{20}(9) = 30 + \frac{90}{20}$$

$$= 30 + 4.5 = 34.5$$

Q_3 లెక్కింపు :

$$Q_3 = \text{Size of } 3\left(\frac{n}{4}\right) \text{ వ అంశం} = \text{Size of } 3\left(\frac{80}{4}\right) \text{ వ అంశం}$$

$$= \text{Size of } \left(\frac{240}{4}\right) \text{ వ అంశం} = \text{Size of } 60 \text{ వ అంశం}$$

60వ అంశం సంచిత పౌనఃపున్యము 66లో ఉంది. సంబంధిత తరగతి 40 - 50

$\therefore$ Q_3 తరగతి = 40 - 50

అంతర్వేశ సూత్రం ఉపయోగించిన

$$Q_3 = l_1 + \frac{l_2 + l_1}{f_1}(q_3 - c)$$

$$= 40 + \frac{50-40}{15}(60-51)$$

$$= 40 + \frac{10}{15}(9) = 40 + \frac{90}{15}$$

$$= 40 + 6 = 46$$

$$Skb = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} = \frac{46 + 22.14 - 2 \times 34.5}{46 - 22.14}$$

$$= \left(\frac{68.14 - 69}{23.86}\right) = \frac{-.86}{23.86} = -.04$$

ఈ దత్తాంశ వైషమ్యము ఋణాత్మకము

ఉదా 12 : దిగువ దత్తాంశము నుండి బౌలీ వైషమ్యగుణకాన్ని లెక్కించండి

మధ్యవిలువలు	5	10	15	20	25	30
పౌనఃపున్యము	1	2	4	3	2	1

జవాబు

తరగతి అంతరాలు (C.I)	పౌనఃపున్యము (f)	సంచిత పౌనఃపున్యము (cf)
2.5 - 7.5	1	1
7.5 - 12.5	2	3

17.5 - 22.5	3	10
22.5 - 27.5	2	12
27.5 - 32.5	1	13

Q_1 లెక్కింపు :

Q_1 = Size of $\left(\frac{n}{4}\right)$ వ అంశం

= Size of $\left(\frac{13}{4}\right)$ వ అంశం

= Size of 3.25 వ అంశం సంచిత పౌనఃపున్యములో

3.25వ 7లో ఉంది, దానికి సంబంధించిన తరగతి 12.5 - 17.5

$\therefore$ Q_1 తరగతి = 13.5 - 17.5

అంతర్నివేశ సూత్రాన్ని ఉపయోగించిన : $Q_1 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f_1}(q_1 - C)$

$$= 12.5 + \frac{17.5 - 12.5}{4}(3.25 - 3)$$

$$= 12.5 + \frac{5}{4}(.25) = 12.5 + \frac{1.25}{4}$$

$$= 12.5 + .31 = 12.81$$

మధ్యగతం లెక్కింపు :

M = Size of $\left(\frac{n}{2}\right)$వ అంశం = Size of $\left(\frac{13}{2}\right)$ వ అంశం

= Size of 6.5 వ అంశం

6.5వ అంశం 7లో ఉన్నది. సంబంధిత తరగతి 12.5 - 17.5

$\therefore$ మధ్యతరగతి = 12.5 - 17.5

అంతర్నివేశ సూత్రాన్ని ఉపయోగించిన : $M = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f_1}(m - c)$

$$= 12.5 + \frac{17.5 - 12.5}{4}(6.5 - 3)$$

$$= 12.5 + \frac{5}{4}(3.5) = 12.5 + \frac{17.5}{4}$$

$$= 12.5 + 4.38 = 16.88$$

Q_3 లెక్కింపు :

$= \text{Size of } \left(\frac{39}{4}\right)$ వ అంశం $= \text{Size of } 9.75$ వ అంశం

9.75వ అంశం సంచిత పౌనఃపున్యము 10లో ఉంది. దానికి సంబంధిత తరగతి **17.5 - 22.5**

Q_3 తరగతి = 17.5 - 22.5

అంతర్వేశ సూత్రాన్ని ఉపయోగించిన : $Q_3 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f_1}(q_3 - c)$

$$= 17.5 + \frac{22.5 - 17.5}{3}(9.75 - 7)$$

$$= 17.5 + \frac{5}{3}(2.75) = 17.5 + \frac{13.75}{3}$$

$$= 17.5 + 4.58 = 22.08$$

$$SKb = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{22.08 + 12.81 - 2 \times 16.88}{22.08 - 12.81}$$

$$= \frac{34.89 - 33.76}{9.27} = \frac{1.13}{9.27} = 0.12$$

ఈ దత్తాంశ వైషమ్యము ధనాత్మకము

ఉదా. 13 : ఒక గణాంక శ్రేణి అంకమధ్యమము 46.6, బాహుళకం 58.2, ప్రామాణిక విచలనం 19.45 అయినచో దాని వైషమ్య గుణకాన్ని గణన చేయండి.

జవాబు : A.M. = 46.6; Z = 58.2; $\sigma = 19.45$

$$SKp = \frac{A.M. - Z}{\sigma} = \frac{46.6 - 58.2}{19.45} = \frac{-11.6}{19.45} = -.60$$

దత్తాంశ వైషమ్య రుణకము ఋణాత్మకము.

ఉదా. 14 : మధ్యగతం 17.4; బాహుళకం 15.3; వైషమ్యగుణకం 0.35, అయితే విచరణ గుణకాన్ని లెక్కించండి.

జవాబు : M = 17.4, Z = 15.3; SKP = 0.35

ప్రామాణిక విచలనం లెక్కింపు : $SKp = \frac{\text{Mean} - Z}{\sigma}$

$$0.35 = \frac{17.4 - 15.3}{\sigma} \quad = \quad 0.35\sigma = 2.1$$

$$\sigma = \frac{2.1}{.35} = .6$$

గుణకము లెక్కింపుము : $C.V. = \frac{\sigma}{A.M.} \times 100$

$$= \frac{6}{17.4} \times 100 = \frac{600}{17.4} = 34.48$$

ఉదా. 15 : రెండు చతుర్థాంశాల తేడా = 8

రెండు చతుర్థాంశాల మొత్తం = 22

మధ్యగతం = 10.5 అయితే వైషమ్య గుణకం కనుక్కోండి.

జవాబు : $Skb = \dfrac{Q_3 - Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$

$$= \frac{22 - 2(10.5)}{8} = \frac{22 - 21}{8} = \frac{1}{8} = .25$$

ఉదా.16 : $Q_1 = 18$, $Q_3 = 25$; $Z = 21$, A.M. $= 18$ గా ఇచ్చారు వైషమ్య గుణకాన్ని కనుగొనండి.

Z = 3 మధ్యగతము - 2 అంకమధ్యమము

3 మధ్యగతము = - 2 అంకమధ్యమము - Z

3 మధ్యగతము = - 2 x 18 - 21

3 మధ్యగతము = - 36 - 21

3 మధ్యగతము = 57

$\therefore$ మధ్యగతము $= \left(\dfrac{57}{3}\right) = 19$

Skb లెక్కింపుము : $= \dfrac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$

$$= \frac{25 + 18 - 2 \times 19}{25 - 18} = \frac{43 - 38}{7} = \frac{5}{7} = .71$$

వైషమ్యము ధనాత్మకము

8.8. సారంశము

విభాజనంలోని పలురకాల తారతమ్యాలను తెలుసుకోవటానికి వైషమ్యాలు తోడ్పడతాయి.

"ఒక విభాజనం సౌష్టంగా లేకపోతే దానిని వైషమ్యం లేదా అసౌష్టవం అంటారు."

వైషమ్యం పౌనఃపున్య విభాజనంలో విలువ సాంద్రత స్థాయినీ, స్వభావాన్ని తెలుసుకోవటానికి సహాయ పడుతుంది. విలువల సాంద్రత ఎక్కువ ఉందో, తక్కువ ఉందో కూడా మనం తెలుసుకోవచ్చు.

సామాన్యత్వం నుంచి ఇచ్చిన విభాజనం ఏ మేరకు జరిగిందో తెలుసుకోవటానికి వైషమ్యమానాలు ఉపయోగపడతాయి.

పౌనఃపున్య విభాజనాలు సౌష్టం లేదా అసౌష్టవం కావచ్చు. సౌష్టవ విభాజనము అంటే అంకమధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకములు సమానంగా ఉంటాయి. బాహుళకము నుండి తీసిన ధనాత్మక విచలనాల మొత్తం ఋణాత్మక విచలనాల మొత్తానికి సమానమవుతాయి. అసౌష్టవ విభాజనాలు ధనాత్మకంగా, ఋణాత్మకంగా ఉంచవచ్చు. ధనాత్మక వైషమ్యంలో అంకమధ్యమం విలువ గరిష్ఠం, బాహుళకపు విలువ కనిష్టం. ఈ రెండు విలువల మధ్య మధ్యగతం ఉంటుంది. వైషమ్యం ఋనాత్మకమైతే మధ్యగతం కంటే అంకమధ్యమము తక్కువ. బాహుళకం కంటే మధ్యగతం తక్కువ.

ఒక శ్రేణిలోని అసౌష్టవం యొక్క మార్గాన్ని, పరిధిని వైషమ్యాల గణాంకమానాల సహాయంతో లెక్కిస్తారు. ఈ కొలతలు రెండూ లేదా అంతకంటే ఎక్కువ శ్రేణులు పోల్చడానికి సాయపడతాయి. ఈ కొలతలను పరమవైషమ్య కొలతలంటారు.

వివిధ యూనిట్లలో ఉన్న రెండు అంతకంటే ఎక్కువ విభాజనాల ఫలితాలను సరిపోల్చటానికి సాపేక్ష వైషమ్య కొలతలను గణన చేయాలి. వీటినే వైషమ్య గణకాలు అంటారు. వైషమ్య గుణకము.

ఎ) కారల్ పియర్సన్ వైషమ్య గుణకము

బి) బౌలీ వైషమ్య గుణకం

సి) కెల్లీ వైషమ్య గుణకం

డి) ఘాతికలకు ఉపయోగించే వైషమ్య కొలతలు

ప్రశ్నలు

లఘు ప్రశ్నలు :

1. వైషమ్యం అంటే ఏమిటి?
2. వైషమ్యాన్ని ఏవిధంగా నిర్ణయిస్తారు?
3. విస్తరణకూ, వైషమ్యానికి గల తేగాలు వివరించండి?

వ్యాస ప్రశ్నలు :

1. సౌష్టవ విభాజనానికి, వైషమ్య విభాజనానికి గల వ్యత్యాసాలను తెలపండి.
2. వివిధ రకాల వైషమ్య కొలతలను తెలపండి
3. గణాంక విశ్లేషణలో సగటులు, విస్తరణకొలతలు, వైషమ్యపు కొలతల ప్రాముఖ్యాన్ని గురించి చర్చించండి.

అభ్యాసాలు

1. దిగువ దత్తాంశానికి SKp ని లెక్కించండి.

వేతనాలు	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5	10.5	11.5
కార్మికుల సంఖ్య	35	40	41	100	125	87	43	22

(జవాబు : 23)

2. వైషమ్యగుణకాన్ని దిగువ దత్తాంశానికి లెక్కించండి

సైజు	5	10	15	20	25	30	35
a) f	1	3	5	7	5	3	1
b) f	1	9	5	4	3	2	1
c) f	1	2	3	4	5	9	1

(జవాబు : SKP = 0; SKP = .88; SKP = .88)

నోట్ : మూడు పౌనఃపున్యాలు ఇచ్చినప్పుడు మూడు లెక్కలు చేయాలి

3. దిగువ దత్తాంశానికి SKP లెక్కించండి :

మార్కులు :	59	61	63	65	67	69	71	73	75
విద్యార్థుల సంఖ్య	1	2	5	16	52	16	5	2	1

(జవాబు : .09)

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు

4. C.I : 2 - 3 4 5 6 7 8 9 10

C.I :	2 - 3	4	5	6	7	8	9	10
f :	7	10	14	35	102	136	43	8

పై దత్తాంశానికి SKP లెక్కించండి (జవాబు : - .33)

5. దిగువ దత్తాంశము నుండి SKP ని లెక్కించండి :

	తగాదా ముందు సమాచారం	తగాదా తరువాత సమాచారం	
కార్మికుల సంఖ్య	1000	950	
సగటు వేతనం	308	325	
ప్రామాణిక విచలనం	25	20	
మధ్యగత వేతనం	320	300	(జవాబు :

6. కింది దత్తాంశానికి కారల్ పియర్సన్ వైషమ్య గుణకాన్ని కనుగొనండి.

C.I.	22–25	26–29	30–33	34–37	38–41	42–45	46–49
(f)	9	8	14	20	28	25	16

(జవాబు : - .377)

7. దిగువ దత్తాంశానికి కారల్ పియర్స్‌న్ వైషమ్య గుణకాన్ని లెక్కించండి.

జీతం (లోపు)	80	90	100	110	120	130	140	150
కార్మికుల సంఖ్య	12	30	65	107	157	202	222	230

(జవాబు : - .33)

8. దిగువ దత్తాంశం నుండి కార్ల్‌పియర్స్‌న్ వైషమ్య గుణకాన్ని లెక్కించండి

మార్కులు (పైన)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
విధ్యార్థుల సంఖ్య	100	98	95	90	80	50	35	23	13	5

(జవాబు : .57)

9. SKb ని దిగువ దత్తాంశానికి లెక్కించండి :

వయస్సు	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79
వ్యక్తుల సంఖ్య	25	35	40	90	75	60

(జవాబు : - 0.07)

10. SKp మరియు SKb విలువలను లెక్కించండి :

(C.I)	200 కంటే తక్కువ	200-400	400-600	600-800	800-1000	1000 ఆపైన
(f)	25	40	80	72	20	16

(జవాబు : Skp = .45; Skb = .54)

పాఠం - 9

సహ సంబంధము

లక్ష్యము :

ఈ పాఠం చదివిన తరువాత రెండు చలన రాశుల మధ్య సహసంబంధాన్ని ఎట్లా కొలవాలో తెలుస్తుంది. అంతేకాక గుణ సంబంధమైన చలన రాశుల మధ్య, సంబంధాన్ని కూడా ఎట్లా కొలవాలో తెలుస్తుంది.

9.1. ఉపోద్ఘాతము

భారతదేశంలోని బ్యాంకులు వడ్డీరేటు తగ్గించాయి. కాబట్టి ప్రజలలో పొదుపు అలవాటు తగ్గింది. రూపాయి విలువను తగ్గించటం వల్ల భారతదేశం యొక్క ఎగుమతులు ప్రోత్సాహకరంగా ఉన్నాయి. ఈ సంబంధాలన్నీ గణితశాస్త్రం ద్వారా నిరూపించకుండా కేవలం ఊహపై ఆధారపడి ఉంటాయి. అర్థ శాస్త్ర సిద్ధాంతాలు చాలావరకు ఉపకల్పనాధారలని, కొన్ని పరిస్థితులన్నపుడే అవి నిజమవుతాయి.

ఏ ఆర్థిక విషయం గురించైనా ఉపకల్పనల ఆధారంతో సిద్ధాంతీకరించినపుడు, ఆ సిద్ధాంతాలు ఎంతవరకు సరైనవో తెలుసుకోవటానికి గణాంక పద్ధతుల ద్వారా విశ్లేషణ జరిపి నిరూపిస్తారు. ఒక చలనరాశిలో వచ్చిన మార్పులు వాటిపై ఆధారపడిన మిగిలిన చలనరాశులలో మార్పులను తీసుకువస్తాయి. ఒక చలనరాశికి, ఇంకొక చలనరాశికి మధ్య వున్న సంబంధం ఎటువంటిది? అది కాలక్రమంలో ఎలా ఉంటుంది? అనే ప్రశ్నలకు సమాధానమే సహసంబంధం. రెండు వర్గాలకు చెందిన సిద్ధాంతాలను పరిమాణాత్మకంగా చూసినపుడు సహసంబంధ సిద్ధాంతము ఏర్పడుతుంది.

మనం సాధారణంగా రెండు లేదా అంతకంటె ఎక్కువ చలనాలను పరిశీలిస్తూంటాము వాటి మధ్యగల సంబంధాన్ని అధ్యయనం చేస్తుంటాము. ఉదాహరణకు డిమాండ్ - సప్లై, వయసు - బరువు, డిమాండ్ - ఉద్యోగవకాశాలు, తండ్రి - తనయుల ఎత్తు మొదలైనవి. గణాంకశాస్త్రంలో వీటికిగల సంబంధాన్ని ఒకే అంకెలో చెప్పటానికి ఉపయోగించే గణాంక సాధనాన్ని సహసంబంధం అంటారు. రెండు చలనరాశుల మధ్య ఉన్న సంబంధాన్ని సగటు ప్రక్రియ ద్వారా నిరూపణ చెయ్యవచ్చు.

9.2. నిర్వచనము

బొడింగ్‌టన్ : "రెండు గ్రూపుల మధ్యగాని, శ్రేణులమధ్యగాని, తరగతుల మధ్యగాని ఖచ్చితమైన సంబంధం ఉన్నట్లయితే దీనిని సహసంబంధం అనవచ్చు. రెండు చలనాలు ఒకే దిక్కులో కదలవచ్చు లేదా వ్యతిరేకమైన దిక్కులలో కదలవచ్చు".

బౌలీ : "రెండు పరిమాణాల మధ్య సంబంధం, ఒక దానిలోని మార్పులకు, రెండవదానిలోని మార్పులు సహకరించినట్లయితే అంటే ఒక పరిమాణంలోని పెరుగుదల లేదా తరుగుదలకు, రెండో పరిమాణంలోని పెరుగుదలకు లేదా తరుగుదలకు సంబంధమున్నట్లు ఒకదాని పరిమాణంలో ఎంత మార్పు వస్తే రెండోదానిలో అంత ఎక్కువ పరిమాణం మార్పు వచ్చినట్లయితే, ఆ రెండు పరిమాణాల మధ్య సహసంబంధము వుంటుంది".

9.3. ప్రాముఖ్యత :

1. విచలన రాసుల మధ్య సంబంధాన్ని ఒకే ఒక సంఖ్యతో కొలవవచ్చు.
2. రెండు చలన రాశులమధ్య సన్నిహిత సంబంధం ఉన్నట్లు తెలుసుకొంటే ఒక చలన రాశి విలువ ఇచ్చినపుడు, రెండవ చలనరాశి విలువను అంచనా వేయవచ్చు. దీనికి ప్రతిగమన విశ్లేషణను ఉపయోగిస్తారు.
3. ఆర్థిక ప్రవర్తనను అవగాహన చేసుకోవటానికి సహసంబంధ విశ్లేషణ తోడ్పడుతుంది.
4. చలనరాశులలో మార్పులకు గల కారణాలను గుర్తించి, వాటిని అదుపుచేసే అవకాశముంది.

9.4. కారణార్థకం :

రెండు చలనరాశుల మధ్య కార్యాకారణ సంబంధం ఉన్నదీ, లేనిదీ సహసంబంధ విశ్లేషణ తెలియజేయదు. రెండు చలనరాశుల మధ్య సహసబంధం ఉన్నంత మాత్రాన ఒక చలనరాశిలో మార్పులకు మరో చలనరాశిలో మార్పులు కారణమని చెప్పలేము. సహసంబంధం రెండుచలన రాశుల మధ్య ఉన్నంత మాత్రాన వాటిమధ్య కార్యకారణ సంబంధం ఉండవచ్చు లేదా లేక పోవచ్చు.

1) ఒక చలనరాశి మరోచలనరాశికి కారణం కావటం : చలనరాశుల మధ్య కార్యకారణ సంబంధం తరచుగా సందర్భోచితంగా నిర్ణయమవుతూ వుంటుంది. ఉదాహరణకు వ్యవసాయ ఉత్పత్తి పెరుగుదలకు వర్షపాతం కారణం అవుతుంది. ఐతే వ్యవసాయ ఉత్పత్తికి వర్షపాతం కారణంకాదు. వ్యవసాయ ఉత్పత్తికి, వర్షపాతానికి సంబంధం లేదు కాబట్టి వర్షపాతాన్ని స్వతంత్ర చలనరాశిగా పిలవవచ్చు. వ్యవసాయ ఉత్పత్తిని అస్వతంత్ర చలనరాశి అని పిలువవచ్చు.

2) రెండు చలనరాశులలో పరస్పరం చర్యలకు లోనుగావచ్చు : పరస్పరం ప్రభావితమయ్యే రెండు లేదా అంతకంటె ఎక్కువ చలనరాశులను మనం చూడవచ్చు. ఉదాహణకు ఒక వస్తువుయొక్క ధర, డిమాండ్ మధ్య హెచ్చుస్థాయి సహసంబంధం విషయంలో ధర. డిమాండ్ అనే రెండు చలనరాశుల పరస్పరం ప్రభావిత మయ్యే అవకాశముంది. అట్లాంటి సందర్భములో ఏ చలనరాశి కారణమో, ఏ చలనరాశి ఫలితమో ఖచ్చితంగా గుర్తించటం సాధ్యం కాదు.

3) ఉమ్మడి కారణం యొక్క ఫలితమే రెండు చలనరాశులు కావడం : అధ్యయనం కిందగల రెండు చలనరాశులు తరచుగా సన్నిహిత సంబంధంతో ఉండవచ్చు. దీనికి కారణం అవి కొన్ని బాహ్యకారణాల ప్రభావానికి లోబడి ఉంటాయి.

ఉదాహరణకు వ్యవసాయ ఉత్పత్తికి, ఎరువుల రాశి ఉపయోగానికీ మధ్యగల హెచ్చుస్థాయి సహసంబంధానికి వర్షపాతం, నీటిపారుదల సదుపాయాలు, విత్తనాల నాణ్యత మొదలైన బాహ్యకారణాలు ఉండవచ్చు. ఇవి రెండు రాశులపై ప్రభావం చూపిస్తాయి. అవి ఒకే రకంగా స్పందించడానికి కారణమవుతాయి.

4) మార్పు ఏకీభావం(**Change co-incidence**):ఒక్కోసారి ఎటువంటి పరస్పర సంబంధంలేని రెండు చలనరాశుల మధ్య హెచ్చు స్థాయి సహసంబంధాన్ని గణితీయ లెక్కలు ఇచ్చే అవకాశముంది. ఇట్లాంటి హెచ్చుస్థాయి సహసంబంధం కేవలం కాకతాళీయమైనది. సహసంబంధ గుణకాన్ని వివరించేటపుడు ఇచ్చిన చలనరాశులు పరస్పరం సంబంధం కలిగివున్నయో, లేదో గమనించాలి. వాటిమధ్య సంబంధం లేకపోతే, గణన చేసిన సహ సంబంధ గుణకము ..... ఇటువంటి సహసంబంధాన్ని నకిలీ సహసంబంధం (Spurious Correlation) అంటారు. ఉదాహరణకు బొగ్గు ఉత్పత్తికి, వ్యవసాయ ఉత్పత్తికిగల హెచ్చుస్థాయి సహసంబంధం.

5) చిన్న శాంపుల్‌లో హెచ్చుస్థాయి సహసంబంధం : చిన్న సమూహాలకు, హెచ్చుస్థాయి సహసంబంధాన్ని పొందే అవకాశముంది. ప్రతిచయన హెచ్చు తగ్గులవల్లగానీ, గణాంక శోధకుని పక్షపాతం వల్లగానీ ఆ విధంగా జరగవచ్చు. చిన్న నమూనాలకు, సార్వజనీన చలనరాశులకు పొందిన ఫలితాలకు మధ్య ప్రాముఖ్యంగల సంబంధం ఏమీ ఉండకపోవచ్చు. ఉదాహరణకు తండ్రులూ, కొడుకుల జతల చిన్న నమూనాను అధ్యయనం చేయడం వల్ల తండ్రుల ఎత్తుల, కొడుకుల ఎత్తుల మధ్య హెచ్చుస్థాయి ఋణసహసంబంధం ఏర్పడి వుండవచ్చు.

9.5. సహసంబంధములలో రకాలు :

సహసంబంధములలో మూడు రకాలు గలవు. అవి :

ఎ) ధనాత్మక సహసంబంధము లేదా ఋణాత్మక సహసంబంధము (Positive (or) Negative correlation)

బి) సాధారణ, పాక్షిక లేక బహుళ సహసంబంధము (Simple, Partial (or) Multiple)

సి) లీనియర్, నాన్ - లీనియర్ సహసంబంధము (Linear or non - linear)

ఎ) **ధనాత్మక సహసంబంధము లేక ఋణాత్మక సహసంబంధము :** ఒక చలనం తక్కువ విలువలు వేరొక చలనం తక్కువ విలువలతోనూ, లేదా ఒక చలనం ఎక్కువ విలువలు వేరొక చలనం ఎక్కువ విలువలతోనూ చలిస్తే అటువంటి సంబంధాన్ని ధన సహసంబంధము అంటారు.

ఉదాహరణకు ధరలు పెరిగితే సప్లయి పెరుగుతుంది. ధరల తగ్గితే సప్లయి కూడా తగ్గుతుంది. అంటే ఒక చలనపు విలువ పెరుగుతుంటే, మరొక చలనపు విలువ గూడా పెరుగుతుంది. అదే విధంగా ఒక చలనపు విలువ తగ్గుతుంటే, మరొక చలనపు విలువ గూడా తగ్గుతుంది. దిగువ నిచ్చిన రెండు శ్రేణులను పరిశీలించండి.

A		B	
X	Y	X	Y
10	40	60	100
20	50	50	90
30	55	40	70
40	60	30	60
50	70	20	20

పై రెండు ఉదాహరణలలో సహసంబంధము ధనాత్మకము ఎందువల్లనంటే A లోని X,Y శ్రేణులు రెండూ ఒకే దిక్కుగా పెరుగుతూ వచ్చాయి. B లోని X,Y శ్రేణులు రెండూ ఒకే దిక్కుగా తరుగుతూ వచ్చాయి.

దిగువ నిచ్చిన రెండు శ్రేణులనూ పరిశీలించండి.

A		B	
X	Y	X	Y
10	70	100	20
20	60	90	30
30	55	70	40
40	50	60	50
50	40	20	60

పైన సూచించిన A లోని X శ్రేణి పెరుగుతూ ఉంది. Y శ్రేణి తరుగుతూ ఉంది. B లో X శ్రేణి తరుగుతూ వుంది.

ఈ ఉదాహరణలో ఒక శ్రేణి ఒక దిక్కులో పయనిస్తుంటే మరొక శ్రేణి దానికి వ్యతిరేక దిక్కులో తగ్గుతూ కానీ, పెరుగుతూ కానీ పయనిస్తుంది. కనుక రెండు చలనాల విలువలు వ్యతిరేక దిక్కులలో చలిస్తే వాటి మధ్యనున్న సంబంధము ఋణాత్మకము.

ఈ ఉదాహరణలో ఒక చలనం ఎక్కువ విలువలు వేరొక చలనం తక్కువ విలువలతోనూ, లేక ఒక చలనం తక్కువ విలువలు వేరొక చలనము ఎక్కువ విలువలతోనూ చలిస్తే ఆ సంబంధాన్ని ఋనాత్మక సంబంధము అంటారు. ఉదాహరణకు ధరలు పెరుగుతున్నపుడు డిమాండు తగ్గుతుంది. లేదా ధరలు తగ్గుతున్నపుడు డిమాండ్ పెరుగుతుంది. అంటే చలనపు విలువ పెరుగుతూ ఉంటే మరొక చలనపు విలువ తగ్గుతుంది. అలాగే ఒక చలనపు విలువ తగ్గుతూ ఉంటే మరొక చలనపు విలువ పెరుగుతుంది.

బి) **సాధారణ, పాక్షిక లేక బహుల సహసంబంధము :** సాధారణ, పాక్షిక లేక బహుళ సహసంబంధములు సహసంబంధ చలనరాశులపై ఆధారపడి ఉంటాయి. సాధారణ సహసంబంధములో రెండు చలనాలనే అధ్యయనం చేస్తాం. రెండు కంటే ఎక్కువ చలనాలను గురించి అధ్యయనం చేస్తే అది బహుళ సహసంబంధము అవుతుంది. (ఉదాహరణకు రాబడి, ఖర్చులు, ధరలు)

ఇలా కాకుండా రాబడి, ఖర్చులు, ధరలు మొదలైన మూడు చలనాలలోనూ ఒక దానిని స్థిరంగా ఉంచి రెండు చలనాలను గురించి మాత్రమే అధ్యయనం చేస్తే పాక్షిక సహసంబంధము అవుతుంది.

ఉదాహరణకు రాబడి, ఖర్చులు, ధరలలో రాబడి, ఖర్చుల మధ్యగల సహసంబంధమును ధరలు స్థిరంగా ఉండగా అధ్యయనం చేయడం.

సి) **లీనియర్, నాన్ - లీనియర్ సహసంబంధము :** లీనియర్, నాన్ - లీనియర్ సహసంబంధము రెండు చలనాల మధ్య విచరణను తెలియజేస్తాయి. ఒక చలనంలోని మార్పు రెండో చలనములోని మార్పుకు సమాన నిష్పత్తిలో ఉన్నట్లయితే లీనియర్ సహసంబంధము అవుతుంది. ఉదాహరణకు ఒక ఫ్యాక్టరీలోని కార్మికుల సంఖ్య రెండింతలు అయినపుడు, వారు చేసే ఉత్పత్తి కూడా రెండింతలు అయినపుడు ఈ రెండు చలనాల మధ్యనున్న సహసంబంధమును లీనియర్ సహసంబంధము అంటారు.

నాన్ - లీనియర్ సహసంబంధములో ఒక చలనములోని మార్పుకు రెండో చలనములోని మార్పు స్థిర నిష్పత్తి వుండదు. ఉదాహరణకు ఒక ఫ్యాక్టరీలోని కార్మికుల సంఖ్య రెండింతలు అయినా, వారు చేసే ఉత్పత్తిలో మార్పు ఖచ్చితంగా రెండింతలు కాకపోతే ఈ రెండు చలనాల మధ్య నున్న సహసంబంధమును నాన్ - లీనియర్ సహసంబంధము అంటారు.

9.6. సహసంబంధము కనుక్కొనే పద్ధతులు :

రెండు, చలనరాశుల మధ్య సహసంబంధాన్ని పరిశీలించడానికి కింది పద్ధతులను ఉపయోగిస్తారు:

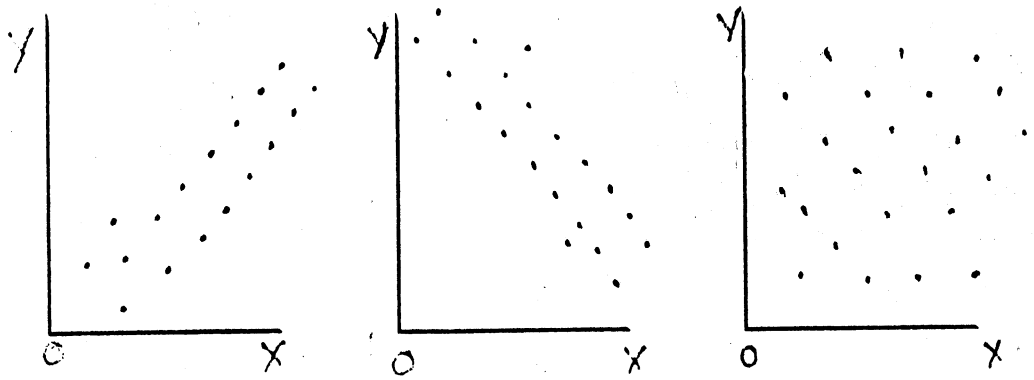
13)

ఎ) వ్యాపనపటం పద్ధతి బి) రేఖాచిత్ర పద్ధతి సి) కార్ల్ పియర్సన్ పద్ధతి డి) కోటి సహసంబంధ పద్ధతి ఇ) అనుషక్త విచలనాల పద్ధతి యఫ్) ప్రతిగమన గుణకాల పద్ధతి వీటిలో మొదటి రెండు పద్ధతులు రేఖా చిత్ర పద్ధతులు, మిగిలినవి గణితీయ పద్ధతులు.

ఎ) వ్యాపన పటం పద్ధతి :

రెండు చలనరాశుల మధ్యగల సహసంబంధాన్ని తెలుసుకొనే పద్ధతులలో ఇది చాలా సులభమైన పద్ధతి. ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించేటపుడు, ఇచ్చిన దత్తాంశంలోని X,Y చలనరాశుల అనురూప విలువలను తీసుకొని వాటిని గ్రాఫ్ పేపరుపై బిందువులుగా గుర్తిస్తారు.... అన్ని బిందువులు రేఖా చిత్రంలో వస్తాయి. ఈ బిందువుల వ్యాపనాన్ని బట్టి X,Y చలనరాశుల మధ్య గల సంబంధాన్ని గుర్తించవచ్చు.

గుర్తించిన బిందువులు దిగువ ఎడమ మూలనుండి ఎగువ కుడిమూలకు పోతే దానిని ధన సహసంబంధమని అంటారు. ఇవి ఒక స్పష్టమైన క్రమాన్ని చూపకపోతే ఆ రెండు చలనరాశుల మధ్య సహసంబంధం లేదని చెప్పాలి. ఇటువంటి స్థితిని సహసంబంధ రాహిత్యం (Absence of correlation) అని అంటారు. గుర్తించిన బిందువులు ఒక సరళరేఖను సూచిస్తున్నట్లు కన్పిస్తే, ఆ చలనరాశులమధ్య ఎక్కువ సంబంధం ఉన్నట్లు గ్రహించాలి. ఆ విధంగా కాకుండా ఈ గుర్తించిన బిందువులు విస్తృతంగా చెదిరినట్లు ఉంటే చలనరాశుల మధ్య సంబంధం అంతగా లేదని అర్థం. గుర్తించిన బిందువులు ఎగువ ఎడమ మూలనుండి దిగువ కుడిమూలకు పోతే దానిని రుణ సహసంబంధమని అంటారు.



ధనసహసంబంధం రుణ సహసంబంధం సహసంబంధ రాహిత్యం

ప్రయోజనాలు :

1) చలనరాశుల మధ్య ఎలాంటి సంబంధం ఉన్నదో త్వరగా తెలుసుకోవచ్చు. ఇందులో గణిత పద్ధతుల ప్రమేయం లేదు. అందువల్ల ఇది తేలికగా అర్థమవుతుంది.

2) వ్యాపన పటంలోని బిందువులను మాత్రమే పరిశీలిస్తాం కాబట్టి అంత్య విలువలు ఈ పద్ధతిని ఎక్కువగా ప్రభావితం చేయలేవు.

3) రెండు చలనరాశుల మధ్యగల సహసంబంధాన్ని నిర్ణయించేటపుడు వ్యాపన పటాన్ని తయారుచేయడం మొదటి మెట్టు.

పరిమితులు :

ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించినపుడు సహసంబంధం ప్రవృత్తి మాత్రమే తెలుస్తుంది. అది ధనాత్మకమో, రుణాత్మకమో తెలుస్తుంది. సహసంబంధం తక్కువ ఉందో ఎక్కువ ఉందో వెల్లడి అవుతుంది. గణితీయ పద్ధతులలో వలె ఈ పద్ధతిలో సహసంబంధ పరిమాణాన్ని గూర్చి తెలియదు.

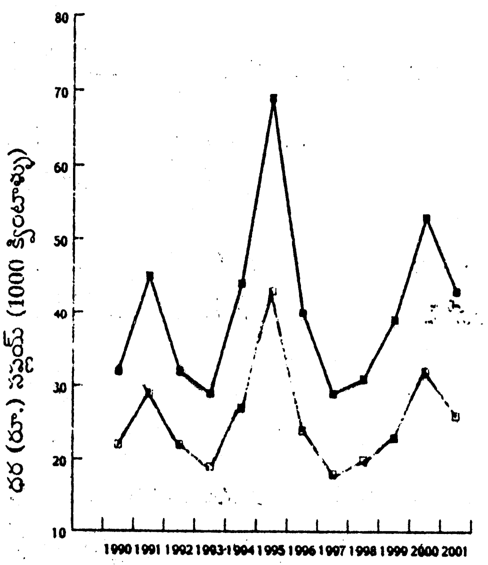
డి) రేఖా చిత్ర పద్ధతి :

రేఖా చిత్రాల ద్వారా రెండు చలనరాశుల మధ్య గల సహసంబంధం ధనాత్మకమా, రుణాత్మకమా లేదా నిరర్ధకమా అనే వివరాలను తెలుసుకోవచ్చు. ఈ పద్ధతిలో X,Y అనే రెండు చలనరాశుల విలువలను గ్రాఫ్ పేపరుపై గుర్తించి X చలనరాశికి ఒక వక్రాన్ని, Y చలనరాశికి ఒక వక్రాన్ని గీస్తారు. ఈ రెండు వక్రాలు పరస్పరం ఎంత సన్నిహితంగా ఉన్నాయో, వాటి విలువలు కాలానుగతంగా ఏదిశలో

మారుతున్నాయో, దాన్ని బట్టి సహసంబంధం స్వభావం చెప్పవచ్చు. రెండు వక్రరేఖలు ఒకే దిశలో పోతే సహసంబంధం ధనాత్మకమని. యతిరేకదిశలో పోతే రుణాత్మక సహసంబంధమని చెప్పవచ్చు. ఉదాహరణకు కింది పట్టికలో ఇచ్చిన ధర, సప్లయ్‌ల మధ్య సహసంబంధాన్ని ఖా చిత్రంలో గమనించండి.

ఒక వస్తువు యొక్క ధర, సప్లయ్

సంవత్సరం	క్వింటాలుకు ధర రూ.	సప్లయి (క్వింటాళ్ళలలో)
1990	32	22,000
1991	45	29,000
1992	32	22,000
1993	29	19,000
1994	44	27,000
1995	69	43,000
1996	40	24,000
1997	29	18,000
1998	31	20,000
1999	39	23,000
2000	53	32,000
2001	43	26,000
ధర	40.5	25,400



సంవత్సరాలు. □ ధర - సప్లయి

ప్రయోజనాలు :

1) వ్యాపన పటంలో లాగానే రేఖాచిత్రాల ద్వారా కూడా చలనరాశుల మధ్య సహసంబంధం ధనాత్మకమా లేదా రుణాత్మకమా అనే విషయాన్ని తేలికగా అర్థం చేసుకోవచ్చు.

2) ఈ పద్ధతిని సాధారణంగా కాలశ్రేణులలో ఉపయోగిస్తారు. కాలసంబంధమైన దత్తాంశంలో దీనిని ఎక్కువగా ఉపయోగిస్తారు.

పరిమితులు : వ్యాపన పటంలో లాగానే, ఈ పద్ధతిలో కూడా చలనరాశుల మధ్య సంబంధాన్ని సంఖ్యాత్మకంగా చెప్పడానికి వీలుకాదు.

సి) కార్ల్ పియర్సన్ పద్ధతి : గణిత పద్ధతులను ఉపయోగించి సహసంబంధాన్ని కొలిచే పద్ధతులలో కార్ల్ పియర్సన్ పద్ధతి ముఖ్యమైనది. ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించి సహసంబంధం గుణకాన్ని కనుక్కొంటారు. దీనిని క్రీ.శ. 1890లో బ్రిటీష్ శాస్త్రవేత్త, కార్ల్ పియర్సన్ ప్రతిపాదించాడు.

1) చలనరాశుల మధ్య సరళరేఖా సంబంధం ఉంటుంది. అంటే చలనరాశుల విలువలు వ్యాపన పటం మీద గుర్తించినపుడు, అవి ఒక సరళరేఖగా రూపొందుతాయి.

2) తీసుకున్న రెండు చలనరాశులు అనేక స్వతంత్ర కారణాలవల్ల ప్రభావితమై సామాన్య విభాజనంగా రూపొందుతాయి.

3) రెండు చలనరాశులలోని వివిధ విలువల మధ్య కార్యకారణ సంబంధం ఉంటుంది. అట్లా కాకుండా అవి స్వతంత్రంగా కనుక ఉంటే వాటి మధ్య సహసంబంధం ఉండే అవకాశం ఉండదు.

అవధులు :

1) కార్ల్ పియర్సన్ సహసంబంధ గుణకం విలువ ఎప్పుడు + 1, - 1 అనే రెండు అవధుల మధ్యనే ఉంటుంది.

2) రెండు చలనాంకాల మధ్య సంపూర్ణ ధన సహసంబంధం ఉంటే సహసంబంధం గుణకం విలువ +1 ఉంటుంది.

3) రెండు చలనాంకాల మధ్య సంపూర్ణ రుణ సహసంబంధం ఉంటే సహసంబంధం గుణకం విలువ -1 ఉంటుంది.

4) ఒక వేళ సహసంబంధం గుణకం విలువ '0' ఉంటే చలనరాశుల మధ్య సంబంధం లేదని భావించాలి.

5) గుణకం విలువ +1కు గాని లేదా -1కు గాని ఎంత దగ్గరగా ఉంటే చలనరాశుల మధ్య అంత దగ్గర సంబంధం ఉంటుంది.

ప్రయోజనాలు :

1) రెండు చలనరాశుల మధ్యగల సంబంధాన్ని సంఖ్యారూపంలో చెప్పడానికి ఈ పద్ధతి ఉపయోగపడుతుంది.

2) ఇది రెండు చలనరాశుల మధ్య సహసంబంధాన్ని కొలవడమే కాకుండా ఏదిశలో ఉందో కూడా తెలియజేస్తుంది.

పరిమితులు :

1) చలనరాశుల మధ్య సహసంబంధతను ఖచ్చితంగా చెప్పగలుగుతుంది. కాని చలనరాశుల మధ్య సహసంబంధం ఉందా, లేదా అనేది చెప్పలేదు.

2) సహసంబంధ గుణకంపై అంత్య విలువల ప్రభావం ఎక్కువగా ఉంటుంది. అంటే ఒకటి రెండు అంత్య విలువలను జోడించడం వల్ల చలనరాశుల మధ్య సహసంబంధం మారుతుంది.

3) వాస్తవ పరిస్థితులను లెక్కలోకి తీసుకోకుండా రెండు చలనరాశుల మధ్య సరళ రేఖాసంబంధం ఉందనే భావంతో సహసంబంధ గుణకాన్ని లెక్కిస్తారు. అందువలన సరైన ఫలితాలను పొందలేము. అంటే ఇది చలనరాశుల మధ్య సరళరేఖీయతను మాత్రమే కొలుస్తుంది.

4) సహసంబంధ గుణకాన్ని వివరించేటప్పుడు చాలా జాగ్రత్తగా వివరించాలి. లేకపోతే మన వివరణ తప్పయ్యే అవకాశముంది.

5) ఇతర పద్ధతులతో పోలిస్తే దీన్ని లెక్కించడానికి ఎక్కువ సమయం పడుతుంది. గణనలు కూడా చాలా కష్టంగా ఉంటాయి.

9.7. సహసంబంధం గణించేపద్ధతులు

ఎ) ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో సహసంబంధం గణించే పద్ధతి :

Steps :

1. x శ్రేణుల పరిమాణాల నుండి సగటును కొనుగొనండి (X)
2. సగటును ప్రతి పరిమాణానికి పోల్చిచూచి విచలనాలను కనుగొనండి (x)
3. విచలనాల వర్గంచేసి మొత్తం చేయండి (Σx^2)
4. y శ్రేణుల పరిమాణాలనుండి సగటును కనుగొనండి (Y)
5. సగటును ప్రతిపరిమాణానికి పోల్చిచూసి విచలనాలను కనుగొనండ (y)
6. విచలనాలను వర్గం చేయండి (y^2)
7. విచలనాల వర్గం మొత్తం చేయండి (Σy^2)
8. రాసుల సంఖ్యను కనుగొనండి (n)
9. x శ్రేణుల విచలనాలను (x) y శ్రేణుల విచలనాల (y) బట్టి గుణించండి (xy)
10. xy వరసలలో సంఖ్యలను మొత్తం చేయండి (Σxy)
11. దిగువ సూత్రాన్ని ఉపయోగించండి.

$$\gamma = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \times \Sigma y^2}}$$

సూత్ర వివరణ :

γ = సహసంబంధము

Σxy = x శ్రేణుల విచలనాలను (x), y శ్రేణుల విచలనాల (y) చే గుణించగా వచ్చిన మొత్తం

Σx^2 = x శ్రేణుల విచలనాల వర్గం మొత్తం

Σy^2 = y శ్రేణుల విచలనాల వర్గం మొత్తం

ప్రత్యక్ష పద్ధతి

రెండు పరిమాణాల మొత్తాన్ని రాసుల సంఖ్యచే భాగించగా శేషం '0'వస్తేనే ఈ పద్ధతి కింద లెక్క చేస్తాం.

ఉదా.1 : x శ్రేణుల సమాచారం, y శ్రేణుల సమాచారం దిగువ దత్తాంశములో పొంద పరచటం జరిగింది. సహసంబంధ గుణకమును దత్తాంశానికి లెక్కించండి.

X విలువ :	10	12	18	24	23	27
Y విలువ :	13	18	12	25	30	10

జవాబు :

X (m_1)	X= 19 x	x^2	Y (m_2)	Y = 18 y	y^2	xy
10	–9	81	13	–5	25	+45
12	–7	49	18	0	0	0
18	–1	1	12	–6	36	+6
24	+5	25	25	+7	49	+35
23	+4	16	30	+12	144	+48
27	+8	64	10	–8	64	–64
	+17	$\Sigma x^2 = 236$		+19	$\Sigma y^2 = 318$	+134
	–17			–19		–64
	$\Sigma x = 0$			$\Sigma y = 0$		$\Sigma xy = 70$

$$A.M._1 = \frac{\Sigma m_1}{n_1} = \frac{114}{6} = 19 \qquad A.M._2 = \frac{\Sigma m_2}{n_2} = \frac{108}{6} = 18$$

6) 114 (19
6
54
54
0

6) 108 (18
6
48
48
0

శేషం సున్నా, x, y పరిమాణాలు రెండింటికీ రావాలి

$$\gamma = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \times \Sigma y^2}}$$

$$\frac{70}{\sqrt{236 \times 318}} = \frac{70}{\sqrt{75048}} = \frac{70}{273.95} = .26$$

బి) దగ్గర పద్ధతిలో సహసంబంధం లెక్కించే పద్ధతి

1. X శ్రేణుల పరిమాణాలనుండి ఏదో ఒక పరిమాణాన్నే ఊహించిన సగటుగా తీసుకోండి (X)
2. ఊహించిన సగటును ప్రతిపరిమాణానికి పోల్చిచూచి విచలనాలను కనుగొనండి (x)
3. విచలనాలను మొత్తం చేయండి (Σx)
4. విచలనాలను వర్గం చేసి మొత్తం చేయండి (Σx^2)
5. Y శ్రేణుల పరిమాణాల నుండి ఏదో ఒక పరిమాణాన్ని ఊహించిన సగటుగా తీసుకోండి (y)
6. ఊహించిన సగటును ప్రతి పరిమాణానికి పోల్చిచూచి విచలనాలను కనుగొనండి (y)
7. విచలనాలను మొత్తం చేయండి (Σy)
8. విచలనాలను వర్గం చేసి మొత్తం చేయండి (Σy^2)
9. X శ్రేణుల విచలనాలను (x), Y శ్రేణుల విచలనాల (y) చే గుణించండి (xy)
10. xy వరుసలోని సంఖ్యలను మొత్తం చేయండి (Σxy)
11. రాసుల సంఖ్యలను లెక్కించండి (n)
12. దిగువ సూత్రాన్ని ఉపయోగించండి.

$$\gamma = \frac{\Sigma xy \ \times n - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{\left[\Sigma x^2 \times n - (\Sigma x)^2\right]\left[\Sigma y^2 \times n - (\Sigma y)^2\right]}}$$

γ = సహసంబంధ గుణకము

Σxy = x శ్రేణుల విచలనాలను, y శ్రేణుల విచలనాలచే గుణించగా వచ్చిన మొత్తం

n = రాసుల సంఖ్య

Σx = X శ్రేణుల సగటును ప్రతి పరిమాణానికి పోల్చి చూడగా వచ్చిన విచలనాల మొత్తం

Σy = Y శ్రేణుల సగటును ప్రతి పరిమాణానికి పోల్చి చూడగా వచ్చిన విచలనాల మొత్తం

Σx^2 = x శ్రేణుల విచలనాల వర్గాల మొత్తం

Σy^2 = y శ్రేణుల విచలనాల వర్గాల మొత్తం

దగ్గర పద్ధతి

ఉదా 2 : గణకశాస్త్రం, గణాంకశాస్త్రంలో 10 మంది విద్యార్థులకు వచ్చిన మార్కులను దిగువ ఇవ్వటం జరిగింది.

వరుస సంఖ్య :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
గణక శాస్త్రం :	45	70	65	30	90	40	50	75	85	60
గణాంక శాస్త్రం :	35	90	70	40	95	40	60	80	80	50

సహసంబంధ గుణకమును లెక్కించండి

జవాబు :

గణకశాస్త్రం X	X = 61 x	x^2 (m_1)	గణాంకశాస్త్రం Y	Y = 64 y	y^2	xy (m^2)
45	−16	256	35	−29	841	+464
70	+9	81	90	+26	676	+234
65	+4	16	70	+6	36	+24
30	−31	961	40	−24	576	+744
90	+29	841	95	+31	961	+899
40	−21	441	40	−24	576	+504
50	−11	121	60	−4	16	+44
75	+14	196	80	+16	256	+224
85	+24	576	80	+16	256	+384
60	−1	1	50	−14	196	+14
Σm_1 = 610	+80	Σx_2 = 3490	Σm_2 = 640	−95	Σy^2 = 4390	Σxy = 3535
	−80			+95		
	Σx = 0			Σy = 0		

$$A.M._1 = \frac{\Sigma m_1}{n_1} = \frac{610}{10} = 61 \qquad A.M._2 = \frac{\Sigma m_2}{n_2} = \frac{640}{10} = 64$$

$$\gamma = \frac{\Sigma xy \ \ x\ n - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{\left[\Sigma x^2 \ x \ n - (\Sigma x)^2\right]\left[\Sigma y^2 \ x \ n - (\Sigma y)^2\right]}}$$

$$= \frac{3535 \ \ x \ 10 - (0)(0)}{\sqrt{\left[3490 \times 10 - (0)^2\right]\left[4390 \times 10 - (0)^2\right]}}$$

$$= \frac{35350 - 0}{\sqrt{[34900 - 0][43900 - 0]}} = \frac{35350}{\sqrt{34900 \times 43900}} = +.093$$

ఈ దత్తాంశానికి సహసంబంధం ధనాత్మకము

ఉదా 3 : కార్ల వయస్సు మరియు వార్షిక నిర్వహణా ఖర్చుల మధ్య సహసంబంధ గుణకాన్ని లెక్కించండి.

కార్లవయస్సు : 2 4 6 7 8 10 12

వార్షిక నిర్వహణా వ్యయం : 1600 1500 1800 1900 1700 2100 2000

నోట్ : సహసంబంధాన్ని లెక్కించేటప్పుడు ఒక అంకెను 10 లేదా 10 గుణకాలచే ఇచ్చిన పరిమాణాలను భాగించినా, గుణించినా సహసంబంధ గుణకము విలువ మారదు.

జవాబు :

కార్లవయస్సు (X) (Σm_1)	X = 7 x	x^2	వార్షిక నిర్వహణా వ్యయం(Y)	Y/100 (Σm_2)	Y = 18 y	y^2	xy
2	−5	25	1600	16	−2	4	+10
4	−3	9	1500	15	−3	9	+9
6	−1	1	1800	18	0	0	0
7	0	0	1900	19	+1	1	0
8	+1	1	1700	17	−1	1	−1
10	+3	9	2100	21	+3	9	+9
12	+5	25	2000	20	+2	4	+10
	−9	$\Sigma x^2 = 70$			+6	$\Sigma y^2 = 28$	+38
	+9				−6		−1
	$\Sigma x = 0$				$\Sigma y = 0$		$\Sigma xy = 37$

$$\gamma = \frac{\Sigma xy \ \ x\ n - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{\left[\Sigma x^2 \ x \ n - (\Sigma x)^2\right]\left[\Sigma y^2 \ x \ n - (\Sigma y)^2\right]}}$$

$$= \frac{37 \times 7 - (0)(0)}{\sqrt{\left[70 \times 7 - (0)^2\right]\left[28 \times 7 - (0)^2\right]}}$$

$$= \frac{259 - 0}{\sqrt{[490 - 0][196 - 0]}}$$

$$= \frac{259}{\sqrt{490 \times 196}} = +.835$$

నోట్ : వార్షిక నిర్వహణా వ్యయంలో ప్రతి పరిమాణంలో రెండుసున్నాలు ఉన్నాయి. దానిని 100చే భాగిస్తే పరిమాణాలలో మార్పు వచ్చినా సహసంబంధ గుణకములో తేడారాదు.

ఉదా. 4 : దిగువ దత్తాంశము యొక్క సహ సంబంధ గుణకాన్ని లెక్కించండి.

X	:	5.1	5.4	5.5	5.9	6.5	6.0	7.2
Y	:	3.8	4.4	3.3	3.6	3.3	2.3	1.0

నోట్ : పై సంఖ్యలలో పాంయిట్ తరువాత ఒకస్థానం ఉంది. అందుచే 10చే గుణించితే మామూలు సంఖ్య అవుతుంది. ఇట్లా గుణించటం వలన సహ్సంబంధ గుణకంలో మార్పు రాదు.

జవాబు :

X	X × 10	X = 59 (x)	x^2	y	y × 10	y = 31 (y)	y^2	xy
5.1	51	–8	64	3.8	38	+7	49	–56
5.4	54	–5	25	4.4	44	+13	169	–65
5.5	55	–4	16	3.3	33	+2	4	–8
5.9	59	0	0	3.6	36	+5	25	0
6.5	65	6	36	3.3	33	+2	4	+12
6.0	60	1	1	2.3	23	–8	64	–8
7.2	72	13	169	1.0	10	–21	441	–273
		+20	Σx^2=311			+29	Σy^2=756	–410
		–17				–29		+12
		Σx = 3				Σy = 0	Σxy = –398	

$$\gamma = \frac{\Sigma xy \times n - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{\left[\Sigma x^2 \times n - (\Sigma x)^2\right]\left[\Sigma y^2 \times n - (\Sigma y)^2\right]}}$$

$$= \frac{-398 \times 7 - (3)(0)}{\sqrt{\left[311 \times 7 - (3)^2\right]\left[756 \times 7 - (0)^2\right]}}$$

$$= \frac{-2786 - 3}{\sqrt{[2177 - 9][5292 - 0]}}$$

$$= \frac{-2783}{\sqrt{2168 \times 5292}} = -.8215$$

= - .8215 ఈ దత్తాంశము యొక్క సహసంబంధ గుణకము ఋణాత్మకము

ఉదా. 5 : X, Y విలువల మధ్య సహసంబంధ గుణకాన్ని లెక్కించండి

అంశాలు	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
X :	+2	+52	+39	+13	+10	–11	0	–60	+30	+6
Y :	+10	–40	–47	+20	+10	–1	+5	+10	+20	+8

నోట్ : పరిమాణాలలో కొన్ని +, – గుర్తులు ఇచ్చినపుడు ఊహించిన సగటు '0'గా తీసుకొంటే విచలనాలను తొందరగా చేయవచ్చు.

జవాబు :

X	X = 10 x	x^2	x	Y = 0 Y	y^2	xy
+2	+2	4	+10	+10	100	+20
+52	+52	2704	–40	–40	1600	–2080
+39	+39	1521	–47	–47	2209	–1833
+13	+13	169	+20	+20	400	+260
+10	+10	100	+10	+10	100	+100
–11	–11	121	–1	–1	1	+11
0	0	0	+5	+5	25	0
–60	–60	3600	+10	+10	100	–600
+30	+30	900	+20	+20	400	+600
+6	+6	36	+8	+8	64	+48
	+152	$\Sigma x^2 = 9155$		+83	$\Sigma x^2 = 4999$	+ 1039
	–71			–88		-4513
	$\Sigma x = 81$			$\Sigma y = -5$		$\Sigma xy = -3474$

$$\gamma = \frac{\Sigma xy \ \ x\ n - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{\left[\Sigma x^2 \ x\ n - (\Sigma x)^2\right]\left[\Sigma y^2 \ x\ n - (\Sigma y)^2\right]}}$$

$$= \frac{-3474 \ x\ 10 - (81)(-5)}{\sqrt{\left[9155 \ x\ 10 - (81)^2\right]\left[4999 \ x\ 10 - (-5)^2\right]}}$$

$$= \frac{-34740-(-405)}{\sqrt{[91550-6561][49990-25]}}$$

$$= \frac{-34335}{\sqrt{84989 \times 49965}} = -.5268$$

= - .5268 ఈ దత్తాంశ సహసంబంధం ఋణాత్మకము.

ఉదా. 6 : దిగువ దత్తాంశంలో జనాభా మొత్తం వివరాలు ఇచ్చారు. వారిలో కొంతమంది పాక్షికంగా మరి కొంతమంది పూర్తిగా గుడ్డివారు. వయస్సుకి గుడ్డితనానికి మధ్య సహసంబంధాన్ని లెక్కించండి.

వయస్సు :	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
వ్యక్తుల సంఖ్య :	100	60	40	36	24	11	6	3
గుడ్డివారు :	55	40	40	40	36	22	18	15

జవాబు :

వయస్సు (X)	మధ్యవిలువలు (M.V) (x)	X = 40 (x)	x^2	వ్యక్తుల సంఖ్య	గుడ్డివారు సంఖ్య	లక్షకు గుడ్డివారు (Y)	y	y^2	xy
0–10	5	–35	1225	100	55	55	–130	16900	+4550
10–20	15	–25	625	60	40	67	–118	13924	+2950
20–30	25	–15	225	40	40	100	–85	7225	+1275
30–40	35	–5	25	36	40	111	–74	5476	+360
40–50	45	+5	25	24	36	150	–35	1225	–175
50–60	55	+15	225	11	22	200	+15	225	+225
60–70	65	+25	625	6	18	300	+115	13225	+2875
70–80	75	+35	1225	3	15	500	+315	99225	+1025
		+80	Σx^2 = 4200				–442	Σy^2 =	+12112
		–80					+445	1,57,425	–175
		$\Sigma x = 0$					$\Sigma y = +3$		$\Sigma xy = 23085$

$$\gamma = \frac{\Sigma xy \ \times n - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{\left[\Sigma x^2 \times n - (\Sigma x)^2\right]\left[\Sigma y^2 \times n - (\Sigma y)^2\right]}}$$

$$= \frac{23085 \times 8 - (0)(0)}{\sqrt{\left[4200 \times 8 - (0)^2\right]\left[1{,}57{,}425 \times 8 - (3)^2\right]}}$$

$$= \frac{1{,}84{,}680 - 0}{\sqrt{[33600-0][12{,}59{,}400-9]}}$$

$$= \frac{1,84,680}{\sqrt{[33600][12,59,39]}} = \frac{1,84,680}{\sqrt{1231553}}$$

$$= \frac{1,84,680}{3,53,093} = .52$$

= .52 దత్తాంశము సహసంబంధం ధనాత్మకము

నోట్ : 1. తరగతి అంతరాలకు మధ్య విలువలు కనుగొంటే X పరిమాణాలు వస్తాయి.

2. Y పరిమాణాలను దిగువ విధంగా కనుగొన్నాము

లెక్కింపులు :

100 – 55 = 55   40 – 40   40 x 100/40 = 100

100 – ?   100 – ?

60 – 40 = 40 x 100/60 = 67   ఇట్లా మిగతా లెక్కింపులు చేయటం జరిగింది.

100 – ?

ఉదా 7. : దిగువ దత్తాంశము నుండి జన సాంద్రతకు, మరణాలు రేటుకు మధ్యగల సహసంబంధం ఏవిధంగా ఉంటుందో తెలపండి.

జిల్లా	విస్తీర్ణం చదరపు కిలో మీటర్లు	జనాభా సంఖ్య	మరణాల సంఖ్య
A	120	24000	288
B	150	75000	1125
C	80	48000	768
D	50	40000	720
E	200	50000	650

జనసాంద్రతా లెక్కింపు : $\frac{\text{జనాభా}}{\text{విస్తీర్ణం చ॥ కిలోమీటర్లు}}$

$A = \frac{24000}{120} = 200$ $B = \frac{75000}{15} = 500$

$C = \frac{48000}{80} = 600$ $D = \frac{40000}{200} = 800$

$E = \frac{50000}{200} = 250$

మరణాలరేటు లెక్కింపు : $\frac{\text{మరణాలసంఖ్య}}{\text{మొత్తం జనాభ}} \times 100$

$A = \frac{288}{24000} \times 1000 = 12$ $B = \frac{1125}{75000} \times 1000 = 15$

$C = \frac{768}{48000} \times 1000 = 16$ $D = \frac{720}{40000} \times 1000 = 18$

$$E = \frac{650}{50000} \times 1000 = 13$$

జవాబు :

			X = 47		Y	Y=14		
జిల్లా	జనసాంద్రత	X/10	x	x^2	మరణాల రేటు	y	y^2	xy
A	200	20	–27	729	12	–2	4	+54
B	500	50	+3	9	15	+1	1	+3
C	600	60	+13	169	16	+2	4	+26
D	800	80	+33	1089	18	+4	16	+132
E	250	25	–22	484	13	–1	1	+ 22
			–49	$\Sigma x^2 = 2480$		+7	$\Sigma y^2 = 26$	$\Sigma xy = 237$
			+49			–3		
			$\Sigma x = 0$			$\Sigma y = 4$		

$$\gamma = \frac{\Sigma xy \times n - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{\left[\Sigma x^2 \times n - (\Sigma x)^2\right]\left[\Sigma y^2 \times n - (\Sigma y)^2\right]}}$$

$$= \frac{237 \times 5 - (0)(4)}{\sqrt{\left[2480 \times 5 - (0)^2\right]\left[26 \times 5 - (4)^2\right]}}$$

$$= \frac{1185 - 0}{\sqrt{[12400 - 0][1300 - 16]}}$$

$$= \frac{1185}{\sqrt{[12400][114]}} = \frac{1185}{\sqrt{14,13,600}}$$

$$= \frac{1185}{1188} = .9988$$

= .9988 ఈ దత్తాంశ సహసంబంధం ధనాత్మకము

సంభావ్యదోషం : సహసంబంధ గుణకపు విశ్వనీయతను సంభావ్య దోషం ఆధారంగా నిర్ణయిస్తారు. సహసంబంధ గుణకానికి వివరణ ఇవ్వటానికి ఇది ఉపయోగిస్తుంది. యాదృచ్ఛిక ప్రతిగమనం తీసికోవటం వలన ఈ విలువ తాలూకు విశ్వనీయత ఎంతవరకు దెబ్బతింటుందో తెలుసుకోవచ్చు. సంభావ్యాదోషాన్ని లెక్కించటానికి దిగువ సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తారు.

$$P.E.\gamma = .6745 \left(\frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}\right)$$

సూత్ర వివరణ :

γ = సహసంబంధ గుణకము

.6745 = స్థిరసంఖ్య

n = తీసుకొన్న జతలసంఖ్య

సంభావ్య దోషవాఖ్యానము :

1. సహసంబంధ గుణకం విలువ, సంభావ్యాదోషం కంటే ఆరురెట్లు ఎక్కువగా ఉంటే, పరిశీలనలోని చలనరాశుల మధ్య సహసంబంధం బాగా ఉందని అర్థం.
2. సహసంబంధ గుణకము విలువ, సంభావ్యా దోషం కంటే తక్కువగా ఉంటే, పరిశీలన లోని చలనరాశుల మధ్య సహసంబంధం లేదని అర్థం.
3. సహసంబంధ గుణకం విలువకు, సంభావ్య దోషం విలువను కూడితే ఎగువ అవధి, తీసివేస్తే దిగువ అవధి వస్తాయి.

సంభావ్యదోషం ఉపయోగించే పరిస్థితులు :

1. ప్రతిచయనాన్ని నిష్పాక్షికంగా ఎన్నుకోవాలి. దానిలో విలువలు స్వతంత్రమైనవై యుండాలి.
2. ఇచ్చిన దత్తాంశం ఇంచుమించుగా సామాన్య పౌనఃపున్య విభాజనానికి దరిదాపులో ఉండాలి.
3. సంభావ్య దోషాన్ని లెక్కించేటపుడు అది ఒక ప్రతిచయనానికి సంబంధించినదై ఉండాలి.

ఉదా. 8 : దిగువ దత్తాంశామునకు సహసంబంధ గుణకమును లెక్కించండి. సంభావ్య దోషాన్ని కూడా లెక్కించండి.

X	:	2	4	6	8
Y	:	5	9	13	17

జవాబు :

X	$\bar{X} = 5$ x	x^2	Y	$\bar{Y} = 11$ y	y^2	xy
2	−3	9	5	−6	36	+18
4	−1	1	9	−2	4	+2
6	+1	1	13	+2	4	+2
8	+3	9	17	+6	36	+18
	+4	$\Sigma x^2 = 20$		+8	$\Sigma y^2 = 80$	$\Sigma xy = 40$
	−4			−8		
	$\Sigma x = 0$			$\Sigma y = 0$		

$$\gamma = \frac{\Sigma xy \times n - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{\left[\Sigma x^2 \times n - (\Sigma x)^2\right]\left[\Sigma y^2 \times n - (\Sigma y)^2\right]}}$$

$$= \frac{40 \times 4 - (0)(0)}{\sqrt{\left[20 \times 4 - (0)^2\right]\left[80 \times 4 - (0)^2\right]}}$$

$$P.E.\gamma = 0.6745\left(\frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= 0.6745\left(\frac{1 - 1^2}{\sqrt{4}}\right)$$

$$= \frac{160 - 0}{\sqrt{[80 - 0][320 - 0]}}$$

$$= \frac{160}{\sqrt{[80] \times [320]}} = \frac{160}{\sqrt{25600}}$$

$$= \frac{160}{160} = 1$$

$$= 0.6745\left(\frac{0}{2}\right) = 0.6745\left(\frac{0}{2}\right)$$

$$= 0.6745 \times 0$$

$$= 0$$

9.9 స్పియర్‌మన్ కోటి సహసంబంధ గుణకం

కొన్ని చలన రాసులను ఖచ్చితంగా నిర్దిష్టమైన విలువలతో వర్ణించి చెప్పటం కష్టము. ఉదాహరణకు తెలివితేటలు, అందచందాలు మొదలైనవి. చార్లెస్ ఎడ్వర్డ్ స్పియర్‌మెన్ అనే శాస్త్రజ్ఞుడు 1904 సంవత్సరంలో రాంక్ సహసంబంధ గుణకమును కనిపెట్టాడు. దానినే స్పియర్‌మెన్ సహసంబంధ గుణకమనీ లేదా కోటీ సహసంబంధ గుణకము అని వ్యవహరిస్తారు.

తెలివితేటలను, అందచందాలను రాశిపరంగా మదింపు చేయటానికి వీలు కలగదు. అలాంటి సందర్భాలలో చలనాల మధ్య సంబంధాన్ని అంశాలకు, రాంకులను ఇవ్వటం ద్వారా కనుగొనవచ్చునని స్పియర్‌మెన్ సూచించాడు.

శ్రేణులలో ఉన్న అంశాలన్నింటికి వాటి వాటి సైజులు ప్రకారం రాంకులు ఇస్తారు. శ్రేణిలోని హెచ్చు విలువలకు మొదటి రాంకు, ఆతరువాత హెచ్చు విలువకు రెండోరాంకు ఆవిధంగా ఇవ్వటం జరుగుతుంది. చలనరాసుల వివరాలకు రాంకులను ఇచ్చి వాటి మధ్య సహసంబంధ గుణకాన్ని లెక్కించవచ్చు. ఇదేవిధంగా శ్రేణిలో అతి తక్కువ విలువలకు మొదటి రాంకు, ఆ తరువాత తక్కువ విలువకు రెండోరాంకు ఇవ్వటం ద్వారా కూడా సహసంబంధ గుణకమును లెక్కించవచ్చు.

కోటి సహసంబంధ గుణకము విలువగూడా +1, -1 ల మధ్య ఉంటుంది. రాంక్ సహసంబంధ గుణకము +1 అయినపుడు రాంకులు ఒకే దిశలో ఉన్నాయనీ, ఇద్దరు జడ్జీల మధ్య సంపూర్ణ అంగీకారం ఉన్నదనీ తెలుస్తుంది. రాంక్ సహసంబంధ గుణకము -1 అయినపుడు సంపూర్ణ ఏకీభావము లేక పోవడాన్ని సూచిస్తుంది. అంటే రాంకులు ఎదురు దిక్కులో ఉన్నట్లు తెలుస్తుంది.

రాంక్ సహసంబంధ గుణకము ప్రయోజనాలు :

1) రెండు చలనరాశుల మధ్య సహసంబంధాన్ని సులువుగా లెక్కించవచ్చును.
2) ఈ పద్ధతి చాలా సులభమైనది
3) గుణాత్మక దత్తాంశమంటే తెలివితేటలు, అందచందాలు మొదలైన వాటి సహసంబంధమును సలువుగా లెక్కించవచ్చు
4) వాస్తవిక దత్తాంశాలు లేకుండా రాంకులు ఇచ్చినపుడు సహసంబంధ గుణకము లెక్కించుటకు ఇది సులువైన పద్ధతి.
5) రాంకుల ప్రకారం సహసంబంధమును లెక్కించుట వలన ఊహజనిత సహసంబంధమును లెక్కించినట్లు అవుతుంది.

పరిమితులు :

1) లెక్కింపు వాస్తవిక పరిశీలనపై ఆధారపడి ఉండదు
2) **కారల్ పియర్‌సన్స్** పద్ధతి నూరు శాతం ఖచ్చితమైన పద్ధతికాదు
3) పరిశీలనలు తక్కువగా ఉన్నప్పుడు సులభమే అయినా, పరిశీలనల సంఖ్య 30 మించి ఉన్నపుడు రాంకులు ఇవ్వటం ఎంతో కష్టం
4) వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనలో ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించలేము.

a) పరిమాణాలు పునరావృతం కానప్పుడు :

1. మొదటి శ్రేణులు (X) పరిమాణాలకు రాంకులు ఇవ్వండి. రాంకులు ఇచ్చేటపుడు అత్యధిక విలువకు 1వ రాంకు, తరువాత అత్యధిక విలువకు 2వ రాంకు ఇట్లా అన్నిపరిమాణాలకు ఇస్తాం. వీటిని, R_1 అంటాం. (R_1)
2. రెండువ శ్రేణుల (Y) పరిమాణాలకు రాంకులు ఇవ్వండి, రాంకులు ఇచ్చేటపుడు అత్యధిక విలువకు 1వరాంకు తరువాత త్యధిక విలువకు 2వరాంకు ఇట్లా అన్ని పరిమాణాలకు ఇస్తాం. వీటిని R_2 అంటాం. (R_2)
3. R_1 విలువలో నుంచి R_2 విలువను తీసివేయండి $(R_1-R_2) = D$

   R_1 విలువ ఎక్కువ ఉంటే వ్యత్యాసాన్ని +, R_2 విలువ ఎక్కువ ఉంటే వ్యాత్సానానికి గుర్తు వేస్తాం.
4. D విలువలను వర్గం చేయండి (D^2)
5. D^2 విలువలను మొత్తం చేయండి (ΣD^2)
6. ఇచ్చిన పరిమాణాల సంఖ్యను తీసుకోండి (n)
7. దిగువ సూత్రాన్ని ఉపయోగించండి

సూత్ర వివరణ : $\gamma_s = 1 - \dfrac{6\Sigma D^2}{n^3 - n}$

γ_s = కోటి సహసంబంధం

ΣD^2 = మొదటి రాంకు, రెండవ రాంకుల మధ్య వ్యత్యాసాలను వర్గం చేయగా వచ్చిన మొత్తం

n = ఇచ్చిన పరిమాణాల మొత్తం (జతల సంఖ్య)

ఉదా. 9 దిగువ దత్తాంశానికి స్పియర్ మెన్ రాంక్ సహసంబంధ గుణకమును లెక్కింపుము

(X) :	90	100	80	65	60	85	95	75
(Y) :	60	55	45	70	80	50	68	74

జవాబు :

X	(R_1)	Y	(R_2)	(R_1–R_2) D	D_2
90	3	60	5	–2	4
100	1	55	6	–5	25
80	5	45	8	–3	9
65	7	70	3	4	16
60	8	80	1	7	49
85	4	50	7	–3	9
95	2	68	4	–2	4
75	6	74	2	4	16
n = 8					$\Sigma d^2 = 132$

$$\gamma_s = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{n^3 - n} = 1 - \frac{6 \times 132}{8^3 - 8} = 1 - \frac{792}{512 - 8}$$

$$= 1 - \frac{792}{504} = 1 - 1.57 = -.57$$

ఈ దత్తాంశానికి రాంక్ సహసంబంధం ఋణాత్మకము

b) ఇచ్చిన పరిమాణాలలో విలువలు పునరావృతమైనపుడు :

రాంకు సహసంబంధం లెక్కించేపద్ధతి :

1. మొదటి శ్రేణి పరిమాణాలకు (X) రాంకులను ఇవ్వండి (R_1) ఒక పరిమాణం పునరావృతమైతే రాంకులు కిందివిధంగా ఇవ్వాలి. ఉదా: 266 అనే పరిమాణం రెండుసార్లు వచ్చింది అనుకొందాం. దాని రాంకులు వరసగా 6,7 వచ్చినవి అనుకుందాం. ఈ రాంకుల సగటు తీసుకోవాలి. అంటే $\frac{6+7}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$ అంటే 26కు రెండుసార్లు రాంకులు 6.5 వస్తుంది.
2. రెండవశ్రేణి పరిమాణాలకు (Y) రాంకులను ఇవ్వండి (R_2) పునరావృతమైతే పైవిధంగానే.
3. R_1-R_2 ల మధ్య వ్యత్యాసాలను తీయండి (R_1-R_2) D
4. D విలువలను వర్గం చేయండి (D^2)
5. D^2 వరసలో ఉన్న వలువలను మొత్తం చేయండి (ΣD^2)
6. ఎన్నిసార్లు పరిమాణాలు పునరావృతమైతే అన్నిసార్లు $\frac{1}{12}(m^3 - m)$ లు సూత్రానికి కలుపుకుంటూ వెళ్ళాళి.
7. m అంటే ఒక్కొక్క పరిమాణం ఎన్నిసార్లువస్తే ఆ సంఖ్యను వేయాలి
   ఉదా॥ పై ఉదాహరణలో 26 రెండు సార్లు వచ్చింది. అందువలన m = 2 అవుతుంది.
8. దిగువ సూత్రాన్ని ఉపయోగించాలి.

$$\gamma_s = 1 - \frac{6\left[\Sigma D^2 + \frac{1}{12}(m^3 - m) + \frac{1}{12}(m^3 - m)..........\right]}{n^3 - n}$$

సూత్ర వివరణ

γ_s = రాంక్ సహసంబంధం

ΣD^2 = R_1, R_2 రాంకుల మధ్య వ్యత్యాసాల వర్గాల మొత్తం

m = పరిమాణం ఎన్ని సార్లు పునరావృతమైందో వాటి సంఖ్య

n = జతలసంఖ్య (పరిమాణాల మొత్తం)

ఉ.దా. 10 దిగువ దత్తాంశానికి రాంక్ సహసంబంధ గుణకమును లెక్కించండి.

X :	16	12	14	17	13	19	11	15	14	18
Y :	22	26	28	30	32	24	26	29	31	33

జవాబు : ఇక్కడ X పరిమాణాలలో 14 రెండుసార్లు వచ్చింది.

14) Y పరిమాణాలలో 26 రెండుసార్లు వచ్చింది.

X	(R_1)	(Y)	(R_2)	(R_1-R_2) D	D^2
16	4	22	10	–6	36
12	9	26	7.5	1.5	2.25
14	6.5	28	6	.5	.25
17	3	30	4	–1	1.00
13	8	32	2	6	36.00
19	1	24	9	–8	64.00
11	10	26	7.5	2.5	6.25
15	5	29	5	0	0
14	6.5	31	3	3.5	12.25
18	2	33	1	1	1.00
					$\Sigma d^2 = 159$

నోట్ : 14కు 6,7, రాంకులు వస్తాయి. ఆరాంకుల సగటు $= \frac{6+7}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$ తరువాత పరిమాణాలకు రాంకులు ఇచ్చినపుడు 8వ రాంకు నుండి ఇస్తారు.

26కు 7, 8 రాంకులువస్తాయి. ఆ రాంకుల సగటు $= \frac{7+8}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$ తరువాత పరిమాణాలకు రాంకులు యిచ్చినప్పుడు 9వ రాంకు నుండి ఇస్తారు.

$$\gamma_s = 1 - \frac{6\left[\Sigma D^2 + \frac{1}{12}(m^3-m) + \frac{1}{12}(m^3-m)\right]}{n^3-n}$$

$$= 1 - \frac{6\left[159 + \frac{1}{12}(2^3-2) + \frac{1}{12}(2^3-2)\right]}{10^3-10} \qquad = 1 - \frac{6\left[159 + \frac{1}{12}(8-2) + \frac{1}{12}(8-2\right]}{1000-10}$$

$$= 1 - \frac{6\left[159 + \frac{1}{12}(6) + \frac{1}{12}(6)\right]}{990} = \frac{1-6[159+.5+0.5]}{990}$$

$$= 1 - \frac{6\,[160]}{990} = 1-(6 \times .16) = 1-.96 = 0.04$$

దత్తాంశానికి రాంకు సహసంబంధం ధనాత్మకము

ఉదా. 11 : ముగ్గురు న్యాయ నిర్ణేతలు ఇచ్చిన రాంకులను దిగువనీయటం జరిగింది. వీరిలో ఏ ఇద్దరి న్యాయ నిర్ణేతల అభిరుచులు దగ్గరిగా ఉన్నాయి.

జడ్జి A :	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
జడ్జి B :	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
జడ్జి C :	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

జవాబు : నేరుగా రాంకులు ఇచ్చారు. తిరిగి మనం రాంకులను ఇవ్వాల్సిన అవసరం లేదు.

R_1	R_2	R_3	R_1-R_2 (D_1)	R_1-R_3 (D_2)	R_2-R_3 (D_3)	D_2^1	D_2^2	D_3^2
1	3	6	–2	–5	–3	4	25	9
6	5	4	1	2	+1	1	4	1
5	8	9	–3	–4	–1	9	16	1
10	4	8	6	2	–4	36	4	16
3	7	1	–4	2	6	16	4	36
2	10	2	–8	0	8	64	0	64
4	2	3	2	1	–1	4	1	1
9	1	10	8	–1	–9	64	1	81
7	6	5	1	2	1	1	4	1
8	9	7	–1	1	2	1	1	4
						ΣD_1^2 200	$\Sigma D_2^2 = 60$	$\Sigma D_3^2 = 214$

$$\gamma s_1 = 1 - \frac{6\Sigma D1^2}{N^3 - N}$$
$$= 1 - \frac{6 \times 200}{10^3 - 10}$$
$$= 1 - \frac{1200}{1000 - 10}$$
$$= 1 - \frac{1200}{990}$$
$$= 1 - 1.2 = -.2$$

$$\gamma s_2 = 1 - \frac{6\Sigma D2^2}{N^3 - N}$$
$$= 1 - \frac{6 \times 60}{10^3 - 10}$$
$$= 1 - \frac{360}{1000 - 10}$$
$$= 1 - \frac{360}{990}$$
$$= 1 - .36 = .64$$

$$\gamma s_3 = 1 - \frac{6\Sigma D3^2}{N^3 - N}$$
$$= 1 - \frac{6 \times 214}{10^3 - 10}$$
$$= 1 - \frac{1284}{1000 - 10}$$
$$= 1 - \frac{1284}{990}$$
$$= 1 - 1.30 = -.30$$

మొదటి, రెండవ న్యాయనిర్ణేతలు అభిరుచులు దగ్గరగా ఉన్నాయి. ఎందువలననగా సహసంబంధ గుణాలు ఈ రెండూ దగ్గరగా ఉన్నాయి కాబట్టి.

9.10 సారాంశం

రెండుచలన రాసుల మధ్య సంబంధాన్ని తెలిపే పద్ధతే సహసంబంధం. దీనివలన విచలనరాసుల మధ్య సంబంధాన్ని ఒకే ఒక సంఖ్యలో కొలవచ్చు. విచరణ నిష్పత్తి, ప్రతిగమనం మొదలగు గణాంక పద్ధతులు సహసంబంధ కొలతలపై ఎక్కువగా ఆధారపడతాయి. ఆర్థిక ప్రవర్తనను అవగాహన చేసుకోవడానికి సహసంబంధ విశ్లేషణ తోడ్పడుతుంది.

రెండుచలన రాసుల మధ్య కార్యకారణ సంబంధ ఉన్నదీ, లేనిదీ సహసంబంధ విశ్లేషణ తెలియజేయదు. రెండు చలనరాశుల మధ్య సహసంబంధం ఉన్నంత మాత్రాన ఒక చలనరాశిలో మార్పులకు మరోచలనరాశిలోని మార్పులకు కారణమని చెప్పలేము.

సహసంబంధంలో ధనాత్మక, ఋణాత్మక సహసంబంధాలు, సాధారణ, పాక్షికలేక బహుళ సంబంధం, లీనియర్, నాన్‌లీనియర్ సహసంబంధం మొదలగు రకాలు ఉంటాయి.

సహసంబంధాన్ని వ్యాపన పటం పద్ధతి, రేఖాచిత్రపద్ధతి, కారల్ పియర్‌సన్ పద్ధతి, కోటి సహసంబంధ పద్ధతి, అనుషక్త విచలన పద్ధతి, ప్రతిగమన గుణకాల పద్ధతి మొదలగు పద్ధతుల ద్వారా లెక్కించ వచ్చు.

సహసంబంధ గుణకపు విశ్వసనీయతను సంభావ్యదోషం ఆధారంగా నిర్ణయిస్తారు. సహసంబంధ గుణకానికి విచరణ ఇవ్వటానికి ఇది ఉపయోగియోగిస్తుంది. యాదృచ్ఛిక ప్రతిగమనం తీసుకోవటం వలన ఈ విలువ తాలూకూ విశ్వసనీయత ఎంత వరకు దెబ్బతింటుందో తెలుసుకోవచ్చు.

తెలివితేటలు, అందచందాలు రాశి పరంగా మదింపు చేయటానికి వీలుండదు. అలాంటి సందర్భాలలో చలనరాసుల మధ్య సంబంధాన్ని అంశాలకు రాంకులను ఇవ్వటం ద్వారా కనుగొనవచ్చునని స్పియర్‌మన్ సూచించాడు. ఇటువంటి దత్తాంశానికి కోటి సహసంబంధ గుణకం ద్వారా సహసంబంధాన్ని లెక్కించవచ్చు.

9.11 ప్రశ్నల, అభ్యాసాలు

లఘుప్రశ్నలు :

1. సహసంబంధం అంటే ఏమిటి?
2. సంభావ్యదోషమనగానేమి?
3. వ్యాపన పటాన్ని ఏవిధంగా నిర్మిస్తారు?

వ్యాసప్రశ్నలు :

1. సహసంబంధంలోని రకాలను చర్చించండి.
2. సహసంబంధాన్ని కనుక్కొనే వివిధ పద్ధతుల సుగుణాలను, పరిమితులను వివరించండి.
3. సహసంబంధం రెండు చలనరాశుల మధ్య ఎల్లప్పుడూ కార్యకారణ సంబంధాన్ని చూపిస్తుందా?

అభ్యాసాలు

1. కారల్ పియర్సన్స్ సహసంబంధ గుణకాన్ని లెక్కించండి. దత్తాంశంలో వ్యాపార ప్రకటన ఖర్చుల వ్యయం మరియు అమ్మకాల సమాచారం ఇవ్వటం జరిగింది.

వ్యాపార ప్రకటన వ్యయం :	39	65	62	90	82	75	25	98	36	78
అమ్మకాలు :	47	53	58	86	62	68	60	91	51	84

(జవాబు : γ = .9874)

2. X,Y విలువల మధ్య సహసంబంధ గుణకాన్ని లెక్కించండి

X విలువ :	15	16	17	18	19	20
Y విలువ :	80	75	60	40	30	20

(జవాబు : .97)

3. కారల్ పియర్సన్స్ సహసంబంధ గుణకాన్ని లెక్కించండి

అనుబంధం :	16	12	18	4	4	10	5	12
సామర్థ్యం :	23	22	24	17	19	20	18	21

(జవాబు : .95)

4. దిగువ దత్తాంశానికి సహసంబంధ గుణకాన్ని లెక్కించండి

X :	2.52	2.49	2.49	2.45	2.43	2.42	2.42	2.40
Y :	730	710	770	990	970	1020	970	1040

(జవాబు : .96)

5. కారల్ పియర్సన్స్ సహసంబంధ గుణకాన్ని లెక్కించండి.

X :	300	350	400	450	500	550	600	650	700
Y :	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600

(జవాబు : 1)

6. X,Y శ్రేణుల విచలనాలను దిగువనీయటం జరిగింది. సహసంబంధ గుణకాన్ని లెక్కించండి.

X	:	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
Y	:	3	3	4	0	4	1	2	–2	–1

(జవాబు : 0)

7. వర్షపాతానికి, మొత్తం ఉత్పత్తికి మధ్యగల సహసంబంధాన్ని లెక్కించండి

వర్షపాతము	:	20	22	24	26	28	30	32
రబీఉత్పత్తి	:	15	18	20	32	40	39	40
కరీఫ్ ఉత్పత్తి	:	15	17	20	18	20	21	15

(జవాబు : .96)

8. స్పియర్‌మన్ రాంక్ సహసంబంధ గుణకాన్ని లెక్కించండి

అకౌంట్‌మార్కులు	:	60	48	52	50	55	62	65	70	68
స్టాటిస్టిక్స్‌మార్కులు	:	72	62	68	65	70	60	55	52	79

(జవాబు : γ_s = .2)

9. రాంక్ సహసంబంధ గుణకాన్ని లెక్కించండి.

X	:	2	5	3	9	6	4	1	7	8	10
Y	:	4	3	2	1	5	6	7	8	10	9

(జవాబు : γ_s = .27)

10. రాంక్ సహసంబంధ గుణకాన్ని లెక్కించండి

సం॥రాలు	:	1	2	3	4	5	6	7
డిబెంచర్లు	:	97.8	99.2	98.8	98.3	98.4	96.7	97.1
వాటాలు	:	73.2	85.8	75.8	77.2	81.2	83.8	78.9

(జవాబు : .11)

11. రాంకు సహసంబంధ గుణకమును లెక్కించండి.

X	:	40	55	72	35	40	48	65
Y	:	60	65	45	50	51	45	45

(జవాబు : –.41)

12. రాంకు సహసంబంధ గుణకాన్ని లెక్కించండి

X	:	60	55	60	70	45	35	27	60
Y	:	40	35	38	42	35	50	48	60

(జవాబు : – .04)

రచయిత
డా. కె.వి.యస్.బి. కుమార్
జె.కె.సి. కళాశాల

పాఠం - 10

ప్రతిగమనం

ఉద్దేశ్యము : ఈ పాఠంలో మీరు ప్రతిగమనమంటే ఏమిటి? ఎక్కడ, ఎట్లా ఉపయోగిస్తారు, దాని ధర్మాలు, ప్రతిగమన రేఖలను గూర్చి తెలుసు కుంటారు.

10.1 ఉపోద్ఘాతము

ప్రతిగమనము అంటే వెనకకు పోవటం లేదా మరలడం అని అర్థం. ఈ పదాన్ని మొట్ట మొదటగా 1877లో తండ్రుల, కొడుకుల ఎత్తులను అధ్యయనం చేస్తూ ఫ్రాన్సిస్ గాల్టన్ సూచించాడు. 1000 తండ్రుల, కొడుకుల ఎత్తులకు మధ్యగల సహసంబంధాన్ని అధ్యయనం చేస్తూ, పొడువుగల తండ్రులకు పొడవుగల కుమారులు, పొట్టి తండ్రులకు పొట్టి కుమారులు ఉంటారు. అంతేకాక పొడవు తండ్రులకు కలిగిన కుమారుల సగటు ఎత్తు, తండ్రుల ఎత్తుకన్నటే తక్కువ ఉంటుంది. పొడవు తక్కువగా ఉన్న తండ్రులకు కలిగిన కుమారుల సగటు ఎత్తు వారి తల్లిదండ్రుల ఎత్తుకంటే ఎక్కువగా ఉంటుంది. తండ్రుల ఎత్తులలోగల విచలనాలు కుమారులు ఎత్తులలో సరి అవుతాయని గాల్టన్ అభిప్రాయం వెలిబుచ్చాడు.

10.2. ప్రతిగమన నిర్వచనం

"దత్తాంశపు అసలు యూనిట్లలో రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ చలనాల మధ్య సగటు సంబంధాన్ని మదింపు చేసే సాధనము ప్రతిగమనము" అని బ్లేయర్ నిర్వచించాడు.

నిర్వచనము యొక్క వివరణ :

1) ప్రతిగమనం రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ చలనాల మధ్య సగటు సంబంధాన్ని తెలియజేస్తుంది.

2) చలనాల మధ్య కార్యకారణ సంబంధాన్ని ఏర్పరుచుతుంది.

3) చలనాల మధ్య దత్తాంశాన్ని ప్రకటించే అసలు యూనిట్లలో సంబంధాన్ని తెలుపుతుంది.

10.3. ప్రతిగమన విశ్లేషణ ఉపయోగాలు

1) స్వతంత్ర చలనరాశి విలువల ఆధారంగా, అస్వతంత్ర చలనరాశి విలువలని అంచనా వేయటానికి రెండు, అంతకంటే ఎక్కువ చలనరాశుల మధ్యగల సంబంధాలను కనుగొనుటకు ప్రతిగమన విశ్లేషణ సహాయపడుతుంది.

2) స్వతంత్ర చలనరాశి విలువల ఆధారంగా, అస్వతంత్ర చలనరాశి విలువల అంచనాలలో సంభవించే దోషాన్ని కనుక్కోవటానికి ప్రతిగమన విశ్లేషణ సహాయపడుతుంది. ప్రామాణిక దోషం సహాయంతో దీనిని కనుగొంటారు.

3) రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ చలనరాశుల మధ్య కార్యకారణ సంబంధాన్ని కనుగొనటానికి ప్రతిగమన విశ్లేషణ సహాయపడుతుంది. దీని ఆధారంతో చలనరాశుల మధ్య పరస్పరాధార సంబంధాలను కనుగొనే వీలుంది.

4) ప్రతిగమన గుణకాల సహాయంతో సహసంబంధ గుణకం లెక్కించవచ్చు. దీని సహాయంతో నిర్ధారణ గుణకం కనుగొంటారు. ఈ గుణకం ద్వారా చలనరాశుల మధ్య సంబంధపు స్థాయిని దిశను తెలపవచ్చు.

10.4. ప్రతిగమన రేఖలు

ప్రతిగమన రేఖ అంటే ఒక చలనం యొక్క విలువను, మరో చలనం యొక్క విలువతో అంచనా వేయటానికి ఉపయోగించే రేఖ. ఈ రేఖ రెండు చలనాల మధ్య సగటు సంబంధాన్ని ప్రాతినిధ్యం వహించి చూపుతుంది.

ఉదాహరణకు రెండు చలనరాశులు X,Y లు ఉన్నాయనుకోండి. మనకు రెండు ప్రతిగమన రేఖలు ఏర్పడతాయి. అంటే Y పైన X ప్రతిగమన రేఖ, X పైన Y ప్రతిగమనరేఖ. Y మీద X ప్రతిగమనరేఖ, ఇచ్చిన Y విలువల ఆధారంగా X తాలూకు అత్యధిక సంభావ్య విలువలను తెలియజేస్తుంది. X మీద Y ప్రతిగమన రేఖ, ఇచ్చిన X విలువల ఆధారంగా Y తాలూకు అత్యధిక సంభావ్య విలువలను తెలియజేస్తుంది. వాటి వాటి సగటు బిందువుల వద్ద రెండు ప్రతిగమన రేఖలు పరస్పరం ఖండించుకొంటాయి. ఆ రెండు రేఖలు ఖండించుకునే ప్రదేశం నుండి X అక్షరం మీద లంబరేఖను గీచినపుడు X శ్రేణి సగటు విలువ దగ్గర X అక్షరాన్ని తాకుతుంది. ఖండించుకున్న ప్రదేశమునుండి Y అక్షరం మీద లంబరేఖను గీస్తే, Y శ్రేణి సగటు విలువ దగ్గర Y అక్షరాన్ని సృష్టిస్తుంది.

ప్రతిగమన రేఖల సహాయంతో కింది సంబంధాలను రాబట్టవచ్చు.

i) రెండు చలనరాశుల మధ్య సహసంబంధం సంపూర్ణంగా, ధనాత్మకమైన లేక ఋణాత్మకమైనా రెండు ప్రతిగమన రేఖలు కలిసిపోయి ఒక రేఖగా రూపొందుతాయి.

ii) రెండు ప్రతిగమన రేఖలు దూరమైన కొద్దీ, రెండు చలనరాసుల మధ్య సహసంబంధము తక్కువ అవుతుంది.

iii) రెండు ప్రతిగమన రేఖలు దగ్గరైన కొద్దీ, రెండు చలనరాసుల మధ్య దూరం తగ్గుతుంది. సహసంబంధము ఎక్కువ అవుతుంది.

iv) ప్రతిగమన రేఖలు కుడివైపుకు వాలినపుడు రెండు చలనాల మధ్య సహసంబంధము సున్నా అవుతుంది.

ప్రతిగమన రేఖలు X అనే శ్రేణికి Y అనే శ్రేణికి మధ్య సహసంబంధం ఉన్నదీ, లేనిదీ తెలియజేస్తాయి. ఈ సంబంధము ధనాత్మకమా లేక ఋణాత్మకమా, ఎక్కువో, తక్కువో తెలుపుతుంది. ఒక చలనరాశిలోని ఒక రకమైన మార్పుకు మరో చలనరాశిలో ఎలా మార్పు వస్తుందో కూడా తెలుపుతుంది. ప్రతిగమనము ద్వారా జీవన వ్యయంలో పెరుగుదలను, ధరల స్థాయిలో పెరుగుదలను కనుగొనవచ్చును. ఒక చలన రాశిలో ఇవ్వబడిన విలువల ద్వారా ఇంకో చలనరాశి మూల్యాన్ని కనుగొనవచ్చు.

10.5. ప్రతిగమన గుణకాల అర్థం

స్వతంత్ర చలనంలోని యూనిట్ మార్పుకు ప్రతిగా అస్వతంత్ర చలనంలో మార్పు స్థాయి దిక్కుని ప్రతిగమన గుణకం తెలియజేస్తుంది. రెండు చలనరాశులకు రెండు ప్రతిగమన సమీకరణాలు ఉన్నాయి. కాబట్టి రెండు ప్రతిగమన గుణకాలు కూడా ఉంటాయి. ఒకటి Y మీద X యొక్క ప్రతిగమన సమీకరణము, రెండోది X మీద Y యొక్క ప్రతిగమన సమీకరణము.

a) Y మీద X ప్రతిగమన గుణకము : Y చలనరాశిలో యూనిట్ మార్పుకు ప్రతిగా X చలనరాశిలో మార్పుస్థాయిని, Y మీద X ప్రతిగమన గుణకం సూచిస్తుంది. దీనిని "b" లేదా "bxy" ల ద్వారా తెలపవచ్చు. క్రింది పద్ధతుల ద్వారా లెక్కిస్తారు :

i) సామాన్య సమీకరణాలను పరిష్కరించటం ద్వారా

Y మీద X యొక్క ప్రతిగమన సమీకరణం

$X_c = a + by$

రెండు సామాన్య సమీకరణాలు

$\Sigma x = Na + b\Sigma y$..........................(i)

$\Sigma xy = a\Sigma y + b\Sigma y^2$ ....(ii)

ఇక్కడ Σx, Σy అనేవి X, Y శ్రేణుల విలువల మొత్తాలను తెలుపుతాయి.

Σy^2 = Y శ్రేణివిలువల వర్గాల సంకలనం

Σxy = X, Y శ్రేణుల విలువల లబ్ధాల సంకలనం

N = తీసుకొన్న జతల సంఖ్య

Y మీద X ప్రతిగమన గుణకాన్ని "b" తెలియజేస్తుంది. సంధాన రేఖ స్థాయిని "a" తెలియజేస్తుంది. పైన యిచ్చిన రెండు సామాన్య సమీకరణాలను పరిష్కరించటం ద్వారా "b" విలువను కనుక్కోవచ్చు.

ii) X,Y అంకమధ్యమాల నుండి విచలనాలను తీసుకొన్నపుడు : $bxy = \gamma \dfrac{\sigma x}{\sigma y}$

ఇక్కడ bxy = Y మీద X ప్రతిగమన గుణకం

γ = X, Y ల మధ్య సహసంబంధ గుణకం

σx = X శ్రేణి ప్రామాణిక విచలనం

σy = Y శ్రేణి ప్రామాణిక విచలనం

పై సమీకరణం సంక్షిప్తరూపం $bxy = \dfrac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}$

ఇక్కడ Σxy = సంబంధిత అంక మధ్యమాల నుంచి తీసుకున్న X, Y , చలనరాశుల విచలనాల, లబ్ధాల సంకలనం.

Σy^2 = అంకమధ్యమం నుంచి తీసుకొన్న Y శ్రేణి విచలనాల వర్గాల సంకలనం.

iii) ఊహించిన సగటునుండి విచలనాలను తీసుకున్నపుడు

$$bxy = \frac{\Sigma xy \times n - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\Sigma y^2 \times n - (\Sigma y)^2}$$

ఇక్కడ Σxy = ఊహించిన సగటుల నుండి తీసుకొన్న x,y శ్రేణుల విచలనాల లబ్ధాల సంకలనం

n = తీసుకున్న జతల సంఖ్య

Σx = ఊహించిన సగటునుండి తీసుకున్న X శ్రేణి విచలనాల సంకలనం

Σy = ఊహించిన సగటు నుండి తీసుకున్న Y శ్రేణి విచలనాల సంకలనం

Σy^2 = ఊహించిన సగటు నుండి తీసుకున్న Y శ్రేణి విచలనాల వర్గాల సంకలనం

iv) అసలు విలువలతో సంఖ్యలను ఇచ్చినపుడు : $bxy = \frac{\Sigma xy \text{ x } n - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\Sigma y^2 \text{ x } n - (\Sigma y)^2}$

ఇక్కడ, bxy = X మీద Y ప్రతిగమన గుణకము

Σxy = X,Y శ్రేణుల లబ్ధాల సంకలనం

Σx = X శ్రేణి విలువల సంకలనం

Σy = Y శ్రేణి విలువల సంకలనం

Σy^2 = Y శ్రేణి విచలనాల వర్గాల సంకలనం

b = X మీద Y ప్రతిగమన గుణకము

b) X మీద Y ప్రతిగమన గుణకం :

X చలనరాశిలోని యూనిట్ మార్పుకి ప్రతిగా Y చలనరాశిలోని మార్పు స్థాయిని, X మీద Y ప్రతిగమన గుణకం సూచిస్తుంది. దీనిని "b" అని లేదా "byx" అనిగాని సూచిస్తారు. దీనిని కింది పద్ధతుల ద్వారా లెక్కిస్తారు.

i) సామాన్య సమీకరణాలను సాధించడం ద్వారా :

X మీద Y ప్రతిగమన సమీకరణం, $Y_c = a+b_x$

రెండు సామాన్య సమీకరణాలు

$\Sigma y = Na + b\Sigma x$ ....(1)

$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$ ....(2)

ఇక్కడ $\Sigma x, \Sigma y$ = X, Y శ్రేణుల విలువల మొత్తాలు

Σx^2 = X శ్రేణి విలువల వర్గాల సంకలనం

Σxy = X, Y శ్రేణుల విలువల లబ్ధాల సంకలనం

N = తీసుకున్న జతల సంఖ్య

X మీద Y ప్రతిగమన గుణకాన్ని "b" తెలియజేస్తుంది. సంధాన రేఖాస్థాయిని "a" తెలుపుతుంది. పైన యిచ్చిన రెండు సామాన్య సమీకరణాలను సాధించడం ద్వారా "b" విలువను కనుక్కోవచ్చు.

(ii) X, Y ల అంకమధ్యమాల నుంచి విచలనాలను తీసుకున్నపుడు : $byx = \gamma \frac{\sigma y}{\sigma x}$

byx = X పై Y పై ప్రతిగమన గుణకం

γ = X, Y ల మధ్య సహసంబంధ గుణకము

σx = X శ్రేణి ప్రామాణిక విచలనం

σy = Y శ్రేణి ప్రామాణిక విచలనం

పై సమీకరణ సంక్షిప్త రూపం $byx = \dfrac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$

ఇక్కడ Σxy = సంబంధిత అంక మధ్యమాల నుంచి తీసుకున్న X, Y చలనరాశుల విచలనాల లబ్ధాల సంకలనం

Σx^2 = అంకమధ్యమం నుంచి తీసుకున్న X శ్రేణి విచలనాల వర్గాల సంకలనం

iii) ఊహించిన సగటునుండి విచలనాలను తీసుకున్నపుడు $byx = \dfrac{\Sigma yx \times n - (\Sigma y)(\Sigma x)}{\Sigma x^2 \times n - (\Sigma x)^2}$

ఇక్కడ Σyx = ఊహించిన సగటునుండి తీసుకున్న X,Y శ్రేణుల విచలనాల లబ్ధాల సంకలనం

Σx = ఊహించిన సగటునుండి తీసుకున్నX శ్రేణి విచలనాల సంకలనం

Σy = ఊహించిన సగటునుండి తీసుకున్న Y శ్రేణి విచలనాల సంకలనం

Σx^2 = ఊహించిన సగటునుండి తీసుకున్న X శ్రేణి విచలనాల వర్గాల సంకలనం

n = తీసుకున్న జతల సంఖ్య

(iv) అసలు విలువలతో సంఖ్యలు ఇచ్చినపుడు : $byx = \dfrac{\Sigma yx \times n - (\Sigma y)(\Sigma x)}{\Sigma x^2 \times n - (\Sigma x)^2}$

ఇక్కడ byx = X మీద Y ప్రతిగమన గుణకము

Σyx = ఊహించిన సగటు నుంచి తీసుకున్న X,Y శ్రేణుల విచలనాల లబ్ధాల సంకలనం

n = తీసుకున్న జతల సంఖ్య

Σx = X శ్రేణి ఊహించిన సగటు నుండి వచ్చిన విచలనాల మొత్తం

Σy = Y శ్రేణి ఊహించిన సగటు నుండి వచ్చిన విచలనాల మొత్తం

Σx^2 = X శ్రేణి ఊహించిన సగటు నుండి వచ్చిన విచలనాల వర్గాల మొత్తం

10.6. ప్రతిగమన గుణకాల ధర్మాలు

(a) రెండు ప్రతిగమన గుణకాలకు ఒకే గుర్తులు ఉంటాయి. అంటే రెండింటికీ + గుర్తు గానీ, – గుర్తుగానీ ఉంటుంది.

(b) రెండు ప్రతిగమన గుణకాల లబ్ధాల వర్గమూలం చలనాల మధ్య సహసంబంధ గుణకానికి సమానం. సాంకేతికంగా $\gamma = \sqrt{bxy \times byx}$

(c) ప్రతిగమన గుణకాలకుండే గుర్తే సహసంబంధ గుణకానికి ఉంటుంది. byx, bxy అనేవి ఋణాత్మకమైతే γ కూడా ఋణాత్మకంగా ఉంటుంది. అట్లాకాక bxy, byx ధనాత్మకమైతే γ కూడా ధనాత్మకంగా ఉంటుంది.

(d) 'γ' ఎల్లప్పుడూ 1కి సమానంగాగానీ తక్కువగా గానీ ఉంటుంది కాబట్టి bxy లబ్ధపు వర్గమూలం 1 కంటె తక్కువగా ఉంటుంది. ఎట్టి పరిస్థితుల్లోనూ 1 కంటె మించదు. bxy 1కంటె ఎక్కువగా ఉంటే, byx 1కంటె తక్కువగా ఉంటుంది. bxy 1కంటె తక్కువగా ఉంటే bxy 1కంటే ఎక్కువగా ఉంటుంది.

(e) bxy, byx ల అంకమధ్యమం సహసంబంధ గుణకానికి సమానంగా గాని, ఎక్కువగా గాని ఉంటుంది.

(f) bxy, byx ప్రతిగమన గుణకాలు సౌష్టవంగా ఉండవు, అంటే bxy ≠ byx కాబట్టి అస్వతంత్ర, స్వతంత్ర చలనరాశులను వేరు పరచటానికి స్పష్టమైన గుర్తింపు కావాలి.

(g) ప్రతిగమన గుణకపు విలువ ధనాత్మకమైతే, ప్రతిగమన రేఖ వాలు ఎడమ నుంచి కుడికి ఊర్ధ్వంగా ఉంటుంది. అట్లాగాక ప్రతిగమ గుణకపు విలువ రుణాత్మకమైతే ఎడమనుంచి కుడికి అధోముఖంగా ఉంటుంది.

10.7. సహసంబంధానికి, ప్రతిగమనానికి వ్యత్యాసాలు

సహ సంబంధం, ప్రతిగమనము రెండూ లేదా అంతకంటే ఎక్కువ చలనాల మధ్యగల సంబంధాన్ని తెలుపుతాయి. అయినప్పటికి ఈ రెండింటి మధ్య స్వరూప, స్వభావాలలో కొన్ని వ్యత్యాసాలు ఉన్నాయి.

సహసంబంధం	ప్రతిగమనము
1. రెండు చలనరాసుల మధ్యగల సంబంధాన్ని తెలుపుతుంది	1. ఒక చలన రాశిలోని మార్పు బట్టి మరో చలన రాశిలో సగటు మార్పు ఎలా ఉందో తెలుపుతుంది.
2. చలనాల మధ్యగల కార్యకారణ సంబంధాన్ని ఏర్పరచదు	2. చలనాల మధ్య కార్యాకరణ సంబంధాన్ని ఏర్పరచుతుంది.
3. చలనాలు పరస్పరం ఆధారపడినా అవి నిమిత్తమాత్రమే	3. పరస్పరం ఆధారపడటాన్ని చూసినా ఆ సంబంధం గణనీయమైనది.
4. సంబంధ వ్యాప్తి +1 లేదా -1కి మధ్యలో ఉంటుంది.	4. స్వతంత్ర విలువల ప్రాతిపదికపై అస్వతంత్ర విలువలను కనుగొనవచ్చు.
5. ఈ పద్ధతి చాలా సులువైనది	5. చలనాల విలువలను అంచనా వేయటకు గూడా ప్రతిగమనం ఉపయోగపడుతుంది.

10.8. ప్రతిగమన సమీకరణాలు ఉపయోగించేటప్పుడు అనుసరించవలసిన పద్ధతి

Steps :

1. X శ్రేణులనుండి ఒక పరిమాణాన్ని ఊహించిన సగటుగా తీసుకోండి(X)
2. X శ్రేణులను, ఊహించిన సగటు (X) తో పోల్చి విచలనాలను కనుగొనండి (x)
3. X శ్రేణుల విచలనాలను మొత్తం చేయండి (Σx)
4. X శ్రేణుల విచలనాలను వర్గం చేయండి (x^2)
5. X శ్రేణుల విచలనాల వర్గాలను మొత్తం చేయండి (Σx^2)
6. Y శ్రేణుల నుండి ఒక పరిమాణాన్ని ఊహించిన సగటుగా తీసుకోండి (Y)
7. Y శ్రేణులను, ఊహించిన సగటు (Y) తో పోల్చి విచలనాలను కనుగొనండి (y)
8. Y శ్రేణుల విచలనాలను మొత్తం చేయండి (Σy)
9. Y శ్రేణుల విచలనాలను వర్గం చేయండి (y^2)
10. Y శ్రేణుల విచలనాలవర్గాలను మొత్తం చేయండి (Σy^2)
11. X శ్రేణుల విచలనాలను (x) Y శ్రేణుల విచలనాలతో (y) గుణించండి (xy)
12. xy వరసలో సంఖ్యలను మొత్తం చేయండి (Σxy)
13. దిగువ సమీకరణ సూత్రాలను ఉపయోగించండి.

X on Y : ఈ సమీకరణాన్ని ఉపయోగించాలంటే Y విలువ ఇచ్చిన X విలువను కనుగొనవలసి వచ్చినపుడు మాత్రమే ఉపయోగిస్తాం,

$$X - \overline{X} = \frac{\Sigma xy \times n - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\Sigma y^2 \times n - (\Sigma y)^2} (Y - \overline{Y})$$

Y on X : ఈ సమీకరణాన్ని ఉపయోగించాలంటే X విలువ ఇచ్చిన Y విలువను కనుగొనవలసి వచ్చినపుడు మాత్రమే ఉపయోగిస్తా

$$Y - \overline{Y} = \frac{\Sigma yx \times n - (\Sigma y)(\Sigma x)}{\Sigma x^2 \times n - (\Sigma x)^2} (X - \overline{X})$$

సూత్ర వివరణ :

X = Y విలువ ఇచ్చినప్పుడు అంచనా X విలువ

Σxy = x శ్రేణుల విచలనాలను, y శ్రేణుల విచలనాలతో గుణించగా వచ్చిన మొత్తం

n = తీసుకొన్న జతల సంఖ్య

Σx = X శ్రేణుల విచలనాల మొత్తం

Σy = Y శ్రేణుల విచలనాల మొత్తం

Σx^2 = X శ్రేణుల విచలనాల వర్గాల మొత్తం

Σy^2 = Y శ్రేణుల విచలనాల వర్గాల మొత్తం

$\overline{Y}$ = Y శ్రేణుల అంకమధ్యమము

$\overline{X}$ = X శ్రేణుల అంకమధ్యమము

ఉదా .1 : దిగువ దత్తాంశనికి రెండు ప్రతిగమన సమీకరణాలను ఉపయోగించండి.

X :	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y :	9	8	10	12	11	13	14	16	15

X విలువ 6.2 ఉన్నప్పుడు Y అంచనావిలువ ఎంత?

X	x = 5	x^2	Y	y = 12	y^2	xy
1	-4	16	9	-3	9	+12
2	-3	9	8	-4	16	+12
3	-2	4	10	-2	4	+4
4	-1	1	12	0	0	0
5	0	0	11	-1	1	0
6	1	1	13	1	1	1
7	2	4	14	2	4	4
8	3	9	16	4	16	12
9	4	16	15	3	9	12
$\Sigma m_1 = 45$ n = 9 $\overline{X} = 5$	$\Sigma x = 0$	$\Sigma x^2 = 60$	$\Sigma m_2 = 108$ n = 9 $\overline{Y} = 12$	Y=0	$\Sigma y^2 = 60$	$\Sigma xy = 57$

X on Y :

$$X - \overline{X} = \frac{\Sigma xy \times n - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\Sigma y^2 \times n - (\Sigma y)^2} (Y - \overline{Y})$$

$$X - 59 = \frac{50 - 0}{270 - 25} (Y - 67.5)$$

$$X - 59 = \frac{50}{245} (Y - 67.5)$$

$X - 59 = 0.20 (Y - 67.5)$

$X - 59 = 0.20 Y - 13.5$

$X = 0.20 Y - 13.5 + 59$

$X = 0.20 Y + 45.5$

Y on X :

$$Y - \overline{Y} = \frac{\Sigma yx \times n - (\Sigma y)(\Sigma x)}{\Sigma x^2 \times n - (\Sigma x)^2} (X - \overline{X})$$

$$Y - 67.5 = \frac{5 \times 10 - (5)(0)}{170 \times 10 - (0)^2} (X - 59)$$

$$Y - 67.5 = \frac{50 - 0}{1700 - 0} (X - 59)$$

$$Y - 67.5 = \frac{50}{1700} (X - 59)$$

$Y - 67.5 = 0.03 (X - 59)$

$Y - 67.5 = 0.03 X - 1.77$

$Y = 0.03X - 1.77 + 67.5$

$Y = 0.03 X + 65.73$ $\quad Y = 0.03(62) + 65.73$

$Y = 1.86 + 65.73$ $\quad Y = 67.59$

$\therefore \gamma = \sqrt{bxy \times byx} = \sqrt{0.20 \times 0.03} = \sqrt{0.006}$

ఉదా .4 : ప్రతిగమన సమీకరణాల ద్వారా సహసంబంధ గుణకాన్ని లెక్కించండి

X	:	91	97	108	121	67	124	51	73	111	57
Y	:	71	75	69	97	70	91	39	61	80	47

అమ్మకాలు			కొనుగోళ్ళు			
X	x = 90	x^2	Y	y = 70	y^2	xy
91	+1	1	71	+1	1	+1
97	+7	49	75	+5	25	+35
108	+18	324	69	-1	1	-18
121	+31	961	97	+27	729	+837
67	-23	529	70	0	0	0
124	+34	1156	91	+21	441	+714
51	-39	1521	39	-31	961	+1209
73	-17	289	61	-9	81	+153
111	+21	441	80	+10	100	+210
57	-33	1089	47	-23	529	+759
Σm_1=900 n=10 $\overline{X}$ = 90	$\Sigma x = 0$	Σx^2=6360	Σm_2=700 n=10 $\overline{Y}$ = 70	Σy=0	Σy^2=2868	Σxy=+3900

Y on X :

$$Y - \overline{Y} = \frac{\Sigma yx \text{ x } n - (\Sigma y)(\Sigma x)}{\Sigma x^2 \text{ x } n - (\Sigma x)^2} (X - \overline{X})$$

$$Y - 38 = \frac{21 \text{ x } 7 - (0)(0)}{28 \text{ x } 7 - (0)^2} (X - 43)$$

$$Y - 38 = \frac{147 - 0}{196 - 0} (X - 43)$$

$$Y - 38 = \frac{147}{196} (X - 43)$$

$$Y - 38 = 0.75 (X - 43)$$

$$Y - 38 = 0.75 x - 32.25$$

$$Y = 0.75x - 32.25 + 38$$

$$Y = 0.75 x + 5.75$$

$$Y = 0.75 (37) + 5.75$$

$$Y = 27.75 + 5.75$$

$$Y = 33.5 \quad \therefore Y = 33.5$$

ఉదా .3 : X on Y మరియు Y on X ప్రతిగమన సమీకరణాలను ఉపయోగించి సహసంబంధగుణకాన్ని కూడా లెక్కించండి. X విలువ 62 ఉన్నప్పుడు Y అంచనా విలువ ఎంత?

జవాబు:

X :	56	55	58	58	57	56	60	64	69	57
Y :	68	67	67	70	65	68	70	66	68	66

Statistics			Maths			
X	X = 59	Σx²	Y	Y = 67	Y²	xy
56	-3	9	68	+1	1	-3
55	-4	16	67	0	0	0
58	-1	1	67	0	0	0
58	-1	1	70	+3	9	-3
57	-2	4	65	-2	4	+4
56	-3	9	68	+1	1	-3
60	+1	1	70	+3	9	+3
64	+5	25	66	-1	1	-5
69	+10	100	68	+1	1	+10
57	-2	4	66	-1	1	+2
Σm=590 n=10 $\overline{X}$=59	Σx = 0	Σx²=170	Σm=675 n=10 $\overline{Y}$=67.5	Σy=+5	Σy²=27	Σxy=+5

X on Y :

$$X - \overline{X} = \frac{\Sigma xy \text{ x } n - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\Sigma y^2 \text{ x.n} - (\Sigma y)^2} (Y - \overline{Y})$$

$$X - 59 = \frac{5 \text{ x } 10 - (0)(+5)}{27 \text{ x } 10 - (5)^2} (Y - 67.5)$$

$$X - 59 = \frac{50 - 0}{270 - 25} (Y - 67.5)$$

$$X - 59 = \frac{50}{245} (Y - 67.5)$$

$X - 59 = 0.20 (Y - 67.5)$

$X - 59 = 0.20\,Y - 13.5$

$X = 0.20\,Y + 13.5 + 59$

$X = 0.20\,Y + 45.5$

Y on X :

$$Y - \overline{Y} = \frac{\Sigma yx \times n - (\Sigma y)(\Sigma x)}{\Sigma x^2 \times n - (\Sigma x)^2} (X - \overline{X})$$

$$Y - 67.5 = \frac{5 \times 10 - (5)(0)}{170 \times 10 - (0)^2} (X - 59)$$

$$Y - 67.5 = \frac{50 - 0}{1700 - 0} (X - 59)$$

$$Y - 67.5 = \frac{50}{1700} (X - 59)$$

$Y - 67.5 = 0.03 (X - 59)$

$Y - 67.5 = 0.03\,X - 1.77$

$Y = 0.03X - 1.77 + 67.5$

$Y = 0.03\,X + 65.73 \qquad Y = 0.03(62) + 65.73$

$Y = 1.86 + 65.73 \qquad Y = 67.59$

$\therefore\ \gamma = \sqrt{bxy \times byx} = \sqrt{0.20 \times 0.03} = \sqrt{0.006}$

ఉదా .4 : ప్రతిగమన సమీకరణాల ద్వారా సహసంబంధ గుణకాన్ని లెక్కించండి

X	:	91	97	108	121	67	124	51	73	111	57
Y	:	71	75	69	97	70	91	39	61	80	47

అమ్మకాలు			కొనుగోళ్ళు			
X	x = 90	x^2	Y	y = 70	y^2	xy
91	+1	1	71	+1	1	+1
97	+7	49	75	+5	25	+35
108	+18	324	69	-1	1	-18
121	+31	961	97	+27	729	+837
67	-23	529	70	0	0	0
124	+34	1156	91	+21	441	+714
51	-39	1521	39	-31	961	+1209
73	-17	289	61	-9	81	+153
111	+21	441	80	+10	100	+210
57	-33	1089	47	-23	529	+759
$\Sigma m_1 = 900$ n=10 $\overline{X} = 90$	$\Sigma x = 0$	$\Sigma x^2 = 6360$	$\Sigma m_2 = 700$ n=10 $\overline{Y} = 70$	$\Sigma y = 0$	$\Sigma y^2 = 2868$	$\Sigma xy = +3900$

X on Y : $X - \overline{X} = \dfrac{\Sigma xy \text{ x } n - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\Sigma y^2 \text{ x } n - (\Sigma y)^2} (Y - \overline{Y})$

$$X - 90 = \frac{3900 \text{ x } 10 - (0)(0)}{2868 \text{ x } 10 - (0)^2} (Y - 70)$$

$$X - 90 = \frac{39000 - 0}{28680 - 0} (Y - 70)$$

$$X - 90 = \frac{39000}{28680} (Y - 70)$$

$$X - 90 = 1.36 \ (Y - 70)$$

$$X - 90 = 1.36Y - 95.2$$

$$X = 1.36Y - 95.2 + 90$$

$$X = 1.36Y - 5.2$$

Y on X $Y - \overline{Y} = \dfrac{\Sigma yx \text{ x } n - (\Sigma y)(\Sigma x)}{\Sigma x^2 \text{ x } n - (\Sigma x)^2} (X - \overline{X})$

$$Y - 70 = \frac{3900 \text{ x } 10 - (0)(0)}{6360 \text{ x } 10 - (0)^2} (X - 90)$$

$$Y - 70 = \frac{39000 - 0}{63600 - 0} (X - 90)$$

$$Y - 70 = \frac{39000}{63600} (X - 90)$$

$$Y - 70 = 0.61 \ (X - 90)$$

$$Y - 70 = 0.61X - 54.9$$

$$Y = 0.61X - 54.9 + 70$$

$$Y = 0.61 \ X + 15.1$$

$$\therefore \ \gamma = \sqrt{bxy \text{ x } byx}$$

$$\gamma = \sqrt{1.36 \text{ x } 0.61} \qquad = \sqrt{.83} = .91$$

ఉదా .5 : ఒక విశ్లేషకుడు ప్రయాణపు ఖర్చులు రూపాలలో (Y) చలన రాసికి మరియు ఒకొక్క ట్రిప్పుకు ఎన్ని రోజులు (X) పడుతుందో దాని చలనరాశికి సంబంధాన్ని పోల్చి చూస్తున్నాడు. అమ్మకం ట్రిప్పుల మొత్తం 102. X,Y లమద్య సంబంధం లీనియర్. దత్తాంశం సంగ్రహరూపం దిగువ విధంగా ఉంది :

$\Sigma x = 510 \quad \Sigma Y = 7140 \quad \Sigma x^2 = 4150 \quad \Sigma y^2 = 740200 \quad \Sigma xy = 54900$

$n = 102$

(i) రెండు ప్రతిగమన సమీకరణాలను రాయండి.

(ii) ఒక ట్రిప్పు 7రోజులు పట్టేటట్లయితే అమ్మకందారుకు ఎంత నగదు ఇస్తే 7 రోజులకు తక్కువ కాకుండా ఉంటుంది?

జవాబు : $\overline{X} = \dfrac{\Sigma x}{n} \qquad \overline{Y} = \dfrac{\Sigma y}{n}$

$= \frac{510}{102} = 5 \qquad = \frac{7140}{102} = 70$

i) **X on Y :** $X - \overline{X} = \frac{\Sigma xy \text{ x } n - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\Sigma y^2 \text{ x } n - (\Sigma y)^2} (Y - \overline{Y})$

$X - 5 = \frac{54900 \text{ x } 102 - (510)(7140)}{740200 \text{ x } 102 - (7140)^2} (Y - 70)$

$X - 5 = \frac{55,99,800 - 36,41,400}{7,55,00,400 - 5.09,79,600} (Y - 70)$

$X - 5 = \frac{19,58,400}{2,45,20,800} (Y - 70)$

$X - 5 = .08 \ (Y - 70)$

$X - 5 = 0.8Y - 5.60$

$X = 0.8Y - 5.60 + 5$

$X = 0.8Y - .60$

(ii) **Y on X :** $Y - \overline{Y} = \frac{\Sigma yx \text{ x } n - (\Sigma y)(\Sigma x)}{\Sigma x^2 \text{ x } n - (\Sigma x)^2} (X - \overline{X})$

$Y - 70 = \frac{54900 \text{ x } 102 - (7140)(510)}{4150 \text{ x } 102 - (510)^2} (X - 5)$

$Y - 70 = \frac{55,99,800 - 36,41,400}{4,23,300 - 2,60,100} (X - 5)$

$Y - 70 = \frac{19,58,400}{1,63,200} (X - 5)$

$Y - 70 = 12 \ (X - 5)$

$Y = 12(X) - 60 + 70$

$Y = 12(7) - 60 + 70$

$Y = 84 + 10$

$\therefore Y = 94$

7 రోజుల ట్రిప్పుకు అమ్మకం సిబ్బందికి రూ. 94 ల నగదు ఇస్తే సరిపోతుంది.

ఉదా.6 : ధర (X) మరియు సప్లయ్ (Y) దత్తాంశ సేకరణ దిగువనీయటం జరిగింది.

$\Sigma x = 130 \quad \Sigma y = 220 \quad \Sigma x^2 = 2288 \quad \Sigma xy = 3467$

Y on X ప్రతిగమన సమీకరణాన్ని ఉపయోగించి ఫలితాన్ని కనుగొనండి. ధర రూ. 16 అయినపుడు సప్లయ్ ఎంత ఉండవచ్చు.

జవాబు : $\overline{X} = \frac{\Sigma x}{n} \qquad \overline{Y} = \frac{\Sigma y}{n}$

$= \frac{130}{10} = 13 \qquad = \frac{220}{10} = 22$

నోట్ : X విలువలను X పరిమాణాల మొత్తంగా తీసుకొన్నాము

15

Y విలువలను Y పరిమాణాలు మొత్తంగా తీసుకొన్నాము

Y on X : $Y - \bar{Y} = \dfrac{\Sigma yx \times n - (\Sigma y)(\Sigma x)}{\Sigma x^2 \times n - (\Sigma x)^2}(X - \bar{X})$

$Y - 22 = \dfrac{3467 \times 10 - (220)(130)}{2288 \times 10 - (130)^2}(X - 13)$

$Y - 22 = \dfrac{34670 - 28600}{22880 - 16900}(X - 13)$

$Y - 22 = \dfrac{6070}{5980}(X - 13)$

$Y - 22 = 1.02\ (X - 13)$

$Y - 22 = 1.02X - 13.26$

$Y = 1.02X - 13.26 + 22$

$Y = 1.02X - 13.26 + 22$

$Y = 16.32 + 8.74$

$\therefore\ Y = 25.06$

ఉదా.7 : ఉత్పత్తి, ధరల మధ్య సహసంబంధం సమాచారం దిగువనీయబడినది.

	ఉత్పత్తి సూచీ	ధరసూచీ
అంకమధ్యమను	110	98
σ	12	5
γ = –.4		

ఉత్పత్తి సూచీ 116 ఉన్నప్పుడు ధరసూచీ ఎంత ఉంటుందో అంచనా వేయండి.

జవాబు : **Y on X :** $Y - \bar{Y} = \gamma \dfrac{\sigma y}{\sigma x}(X - \bar{X})$

$Y - 98 = -.4\ \dfrac{5}{12}(X - 110)$

$Y - 98 = -.4 \times .42\ (X - 110)$

$Y - 98 = -.168\ (X - 110)$

$Y - 98 = -.168X + {}^{*}18.48$

$Y = -.168X + 18.48 + 98$

$Y = -.168X + 116.48$

$Y = -.168\ (116) + 116.48$

$Y = -19.488 + 116.48$

$\therefore\ Y = 96.92$

* నోట్ : (–) x (-) = + అవుతుంది.

10.9. సారాంశము

ప్రతిగమనము అంటే వెనకకు పోవటం లేదా మరలడం అని అర్థం. ఈ పదాన్ని మొట్టమొదటసారి 1877లో ఉపయోగించారు. తండ్రీ, కొడుకుల ఎత్తులను అధ్యయం చేయటానికి ఈ సమీకరణాలను ఉపయోగించారు.

ప్రతి గమనం రెండూ లేదా అంతకంటే ఎక్కువ చలనాలమధ్య సంబంధాన్ని తెలియజేస్తుంది. స్వతంత్ర చలన రాశి విలువల ఆధారంగా, అస్వతంత్ర చలనరాసి విలువలను అంచనా వేయటానికి రెండు, అంతకంటే ఎక్కువ చలనరాసుల మధ్యగల సంబంధాలను కనుగొనుటకు ప్రతిగమన విశ్లేషణ సహాయపడుతుంది.

ప్రతిగమన రేఖ అంటే ఒక చలనం యొక్క విలువను, మరోచలనం యొక్క విలువతో అంచనా వేయటానికి ఉపయోగించేరేఖ, X,Y చలనరాశులు రెండు ఉంటే మనకు రెండు ప్రతిగమన రేఖలు ఏర్పడతాయి. స్వతంత్ర చలనంలోని యూనిట్ మార్పుకు ప్రతిగా అస్వతంత్ర చలనంలో మార్పుస్థాయిని ప్రతిగమన గుణకం తెలియజేస్తుంది. రెండు రకాల ప్రతిగమన సమీకరణాలు ఉన్నాయి. అవి X on Y మరియు Y on X. మొదటి సమీకరణంలో Y విలువ ఇచ్చి X విలువను కనుగొనవలసి వచ్చినపుడు ఉపయోగిస్తాం. రెండవ సమీకరణాన్ని X విలువ ఇచ్చి Y విలువను అంచనా వేయమన్నప్పుడు ఉపయోగిస్తాం.

10. ప్రశ్నలు

లఘుప్రశ్నలు :

1. సహసంబంధం, ప్రతిగమనమునకు గల వ్యత్యాసాలను తెలపండి
2. ప్రతిగమన సమీకరణాలను గూర్చి వివరించండి.
3. ప్రతిగమన రేఖలను గూర్చి చర్చించండి

వ్యాసప్రశ్నలు :

1. ప్రతిగమనమంటే ఏమిటి? సహసంబంధం, ప్రతిగమనానికి మధ్యగల వ్యత్యాసాలను తెల్పండి?
2. ప్రతిగమనాన్ని నిర్వచించి, దాని ఉపయోగాలను వివరించండి?
3. ప్రతిగమన గుణకాలను లెక్కించే పద్ధతులనుగూర్చి వివరించండి?

అభ్యాసాలు

1. దిగువ దత్తాంశంలో భర్తల, భార్యల వయస్సులు ఇవ్వటం జరిగింది. ప్రతిగమన సమీకరణాలను గణన చేయండి. భార్యవయస్సు 25 సం॥రాలు ఉంటే భర్త వయస్సు ఎంత ఉంటుంది. భర్త వయస్సు 30 సం॥రాలుంటే భార్య వయస్సును అంచనా వేయండి.

భర్త వయస్సు :	25	28	30	32	35	36	38	39	42	45
భార్య వయస్సు :	20	26	29	30	25	18	26	35	35	46

(జవాబు: X = 33 సం॥ ; y = 25 సం॥)

2. ఫాక్టరీలో పనిచేసిన సంవత్సరాలు, ఆదాయం ఇవ్వటం జరిగింది. ఒక ఉద్యోగికి 12 సం॥రాల సర్వీసు ఉంది. అతని ఆదాయం గూర్చి అంచనా వేయండి.

సర్వీసు సం॥రాలలో :	11	7	9	5	8	6	10
ఆదాయం :	7	5	3	2	6	4	8

(జవాబు: Y = 8)

3. దిగువ దత్తాంశము నుండి రెండు ప్రతిగమన సమీకరణాలను లెక్కించండి. రెండు చలన రాశులమధ్య సహసంబంధాన్ని కూడా లెక్కించండి.

X :	1	4	3	4	5	6	7	8	9	10
Y :	3	5	2	10	8	7	6	4	5	1

(జవాబు : r = - 0.14)

4. క్రింద దత్తాంశం నుండి రెండు ప్రతిగమన గుణకాలను, సహసంబంధ గుణకాన్ని లెక్కించండి.

X :	6.9	8.5	5.8	8.6	9.6	8.0	9.7
Y :	2.9	3.8	6.6	2.3	5.5	3.5	3.2

(జవాబు : r = .45

5. దిగువ దత్తాంశంలో ముంబాయిలోని ధరలు, కోల్‌కతాలోని ధరలను ఇవ్వటం జరిగింది. కోల్‌కతాలోని రూ. 70ధరకు ముంబాయిలో ధర ఎంత ఉండవచ్చు?

వివరాలు	ముంబాయి	కోల్‌కతా
సగటు	67	65
ప్రామాణిక విచలనం	3.5	2.5

$\gamma = +.8$

(జవాబు : 72.6)

6. ఇంగ్లీషులో 60 మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థికి లెక్కలలో ఎంత వచ్చి ఉండవచ్చో దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా లెక్కించండి. ప్రతిగమన సమీకరణాన్ని ఉపయోగించండి.
లెక్కలలో సగటుమార్కు = 80; ఇంగ్లీషులో సగటుమార్కు = 50; లెక్కల ప్రామాణిక విచలనం = 15; ఇంగీషు ప్రామాణిక విచలనం = 10; సహసంబంధ గుణకము = 0.4

(జవాబు : x = 86)

రచయిత
డా.కె.వి.యస్.బి.కుమార్
జె.కె.సి.కళాశాల

పాఠం - 11

సమితి సిద్ధాంతము (Set Theory)

భావసారూప్యముగల అనేక వస్తువులను ఒక సమూహముగా ఉంచితే దానిని సమితి అంటాము. ఇది ఆధునిక గణితశాస్త్రములో ఉనికిని పొంది తరువాత గణాంక సిద్ధాంతములలో ఎక్కువ ప్రాముఖ్యతను చేకూర్చుకుంది. సహజంగా తీవ్ర సిద్ధాంత స్వభావముగల ఈ అంశములు వాటి ప్రాముఖ్యత రీత్యా తగినంత సులభశైలిలో మనం ఈ పాఠం ద్వారాతెలుసుకుందాము.

ముఖ్యాంశాలు

11.1 సమితి - నిర్వచనములు

11.2 ఉపసమితి

11.3 వివిధ రకాల సమితులు

11.4 సమితుల ప్రక్రియలు

11.5 వేన్ చిత్రాలు

11.6 డిమోర్గాన్ న్యాయము

11.7 సమితిశాస్త్రం - అనువర్తనములు.

సమితి శాస్త్రము

11.1 సమితి

<u>నిర్వచనములు :</u> ఒక వస్తు సముదాయములో ఏవస్తువైనా ఉందనిగాని లేదని గాని ఖచ్చితముగా చెప్పగలిగితే అటువంటి సముదాయాన్ని సమితి అంటారు.

సమితిలో ఉన్న వస్తువులను మూలకాలు (elements) అని అంటారు. సమితులను A,B,C... అని, మూలకాలను a,b,c... అని సూచిస్తారు.

సమితిని రెండు విధాలుగా సూచిస్తారు. అవి : మొదటిది జాబితారూపము రెండోది సమితి నిర్మాణరూపం.

1. <u>జాబితారూపం :</u> ఈ పద్ధతిలో మూలకాలన్నిటిని మీసాల బ్రాకెట్టులో రాసి, వాటి మధ్య కామాలనుంచుతారు. సమితులను సూచించునపుడు { } మీసాల బ్రాకెట్టులను ఉపయోగిస్తారు మరియు ఆంగ్ల పెద్ద అక్షరాలతో రాస్తారు.

ఉదా : A = {2,3,5,7}, N = {a,b,c.d}

2. సమితినిర్మాణ రూపం : ఈ పద్ధతిలో సమితి ఒక సామాన్య నియమాన్ని లేదా ధర్మాన్ని కలిగిన మూలకాలతో ఏర్పడుతుంది. లేదా ఒక ప్రవచనంతో సూచిస్తారు.

ఉదా : B = { y/y అనునది బేసి సహజ సంఖ్య}

11.2 ఉపసమితి (Sub set) :

<u>నిర్వచనము :</u> A అనే ఒక సమితిలో ఉన్న ప్రతిమూలకం B లో ఉంటే A ను B కి ఉపసమితి అంటాం. దీనిని $A \subseteq B$ అని లేదా $B \supseteq A$ అని కాని సూచిస్తారు.

ఉదా : A = {2,3,4} , B = {2,3,4,5},

$A \subseteq B$

శుద్ధ ఉపసమితి (Proper Subset)

నిర్వచనం : A అనే సమితి B కి ఉపసమితి అవుతూ A,B లు సమాన సమితులు కాక పోతే A,B కి శుద్ధ ఉపసమితి అంటాం. దానిని $A \supset B$ అనికాని, $B \subset A$ ని కాని సూచిస్తారు.

ఉదా : A = {4,5,6}, B = {5}, $A \supseteq B$.

ప్రతి సమితికి రెండు ఉపసమితులుంటాయి. 1) క్రమ ఉపసమితి (2) అక్రమ ఉపసమితి. ప్రతి సమితి తనకుతాను ఉపసమితి. శూన్య సమితి ప్రతి సమితికి ఉపసమితి.

1. సమితి యొక్క క్రమోప సమితి : A,B లు ఏవేని రెండు శూన్యేతర సమితులయి, B లోని ఏ దేని ఒక మూలకం A లో లెనిచో A లో లేనిచో A ను B యొక్క క్రమోపసమితి అంటాం.

ఉదా : A = {1,2,3,4}, B={2,3,1,5,4} అయిన A ను B యొక్క క్రమోప సమితి అని అంటారు.

2. అక్రమ ఉపసమితి : ప్రతి సమితికి, శూన్య సమితి మరియు తనకు తానే అక్రమ ఉపసమితులంటారు.

11.3 వివిధరకాల సమితులు (Types of Sets)

1. ఏకమూలక సమితి (Singleton Set)

నిర్వచనం : ఏదైన ఒక సమితిలో ఒకే ఒకమూలకముంటే ఆ సమితిని "ఏకమూలక సమితి" అని అంటారు.

ఉదా : A = {b}, B = {1}

2. శూన్యసమితి (Null Set or Zero Set)

నిర్వచనం : ఏదైనా ఒక సమితిలో ఒక మూలకం కూడా లేకపోతే ఆ సమితిని శూన్య సమితి అంటారు. శూన్య సమితిని "ϕ" తో సూచిస్తాం.

ఉదా : ϕ = A = {x/x రెండుతో భాగించబడే బేసి సంఖ్య A} A లో ఎటువంటి సంఖ్యలు ఉండవు కావున 'A' శూన్య సమితి.

ఉదా : 2. ϕ = {వంధ్య పుత్రుడు}

3. అనంతసమితి (Infinite set)

నిర్వచనం : ఏదైన ఒక సమితిలోని మూలకాల సంఖ్య అనంతమైతే దానిని అనంత సమితి అంటాం.

ఉదా : 1. A = {1,2,3...}

4. ఘాత సమితి (Power set)

నిర్వచనం : A అనే సమితిలో ఉన్న అన్ని సమితులు మాత్రమే మూలకాలుగా ఉన్న సమితిని A యొక్క ఘాత సమితి అంటాం. దీనిని P(A) తో రాస్తాం.

ఉదా : A = {1,2} తేయితే

P(A) = {ϕ, (1), (2), (1,2)} అవుతుంది.

సమితి A లోని మూలకాల సంఖ్య M అయిన. P (A) లోని మూలకాలు అనగా A యొక్క అన్ని ఉపసమితుల సంఖ్య 2^m అవుతుంది.

5. సమాన సమితులు (Equal Set)

నిర్వచనం : A,B అనే సమితులు అకే వస్తు సముదాయంతో ఏర్పడితే వాటిని సమాన సమితులు అంటారు. వాటిని A=B తో సూచిస్తారు. A, B లు సమాన సమితులు కాకపోతే $A \neq B$ రాస్తాం.

ఉదా : A = {1,2,3}, B = {2,1,3} ఐతే A = B.

6. వివర్జిత సమితులు (Disjoint Set)

నిర్వచనం : A,B అనే రెండు సమితులలో ఒకదానిలో మూలకాలు, రెండవ సమితిలో లేక పోతే వాటిని వివర్జిత సమితులు అంటాం.

ఉదా : A= {2,3,4}, B = {5,6,7} ఐతే $A \cap B = \phi$

7. విశ్వసమితి (Universal Set)

నిర్వచనం : సమితి సిద్ధాంతంలో ఏదైనా ఒక సమితికి మిగిలిన అన్ని సమితులు ఉపసమితులైతే ఆ సమితిని మిగిలిన సమితులను విశ్వసమితి అంటాం. దానిని సామాన్యంగా "U" లేదా "S" తో సూచిస్తాం. 'X' తో కూడా సూచిస్తాం.

ఉదా : ధన పూర్ణాంకాల గురించి చదివేటపుడు, సహజ సంఖ్యలను సమితి లేదావాస్తవ సంఖ్యల సమితి లేదా వాస్తవ సంఖ్యల సమితి విశ్వ సమితులు అవుతాయి.

11.4 సమితుల ప్రక్రియలు (Operatians on Sets)

1. **సమితుల సమ్మేళనము : (Union of Sets).**

నిర్వచనం :- A,B అనే సమితులలో A లో గాని B లోగాని ఉండే మూలకాలతో ఏర్పడే సమితిని A,B ల సమ్మేళనం అంటారు. దీనిని A U B తో సూచిస్తారు. A,B లు రెండు సమితులైతే A U B ఒకే సమితి అవుతుంది. దీనిని క్రింది విధంగా రాస్తారు.

$A \cup B = \{x/x \in A$ లేదా $x \in B\}$

$A \cup B = B \cup A$

ఉదా : A = {1,2,3,4}, B= {3,5,6,7}

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

2. **సమితుల ఛేదనం (Intersetion of Sets) :**

నిర్వచనం : A, B అనే సమితులలోని ఉమ్మడి మూలకాలన్నింటితో ఏర్పడే సమితిని ఛేదనం అని అంటాం. దీనిని $A \cap B$ తో సూచిస్తాం. దీనిని క్రింది విధంగా రాస్తారు.

$A \cap B = \{x/x \in A$ మరియు $x \in B\}$

$A \cap B = B \cap A$

ఉదా : A = {1,2,3,4,5}, B= {1,2,3,6} ఐతే

$A \cap B = \{1,2,3\}$.

3. **సమితుల భేదం (Defference of sets)**

నిర్వచనం : A అనే సమితిలో ఉండి B అనే సమితిలో లేని మూలకాలన్నింటితో ఏర్పడి సమితిని A,B ల భేదం అని అంటాం. దానిని A - B తో సూచిస్తాం. దీనిని క్రింది విధంగా రాస్తారు.

$A - B = \{X/X \in A$ మరియు $X \notin B\}$

$A-B \neq B-A$; $A-B \subseteq A$

ఉదా : $A = \{1,2,3,4,5,7,8\}$, $B = \{5,6,7,8,9\}$

అయితే $A - B = \{1,2,3\}$ అవుతుంది.

4. పూరక సమితులు (Compliment of set).

నిర్వచనం : S అనేది విశ్వసమితి మరియు 'A' ఒక సమితి అయితే S-A, A కి పూరక సమితి అవుత దీనిని 'A¹' లేదా A^c తో సూచిస్తారు. దీనిని క్రింది విధంగా రాస్తారు.

$A^1 = S\text{-}A = \{X/X \in S$ మరియు $X \notin A\}$

$A \cup A^1 = S$, $A \cap A^1 = \phi$.

5. క్రమ యుగ్మములు :

a మరియు b లనునవి ఏవేని రెండు మూలకాలు అయిన (a,b) ను యుగ్మము అంటారు, a,b లు ఒక దత్త నియమాన్ని పాటిస్తే (a,b) ను క్రమ యుగ్మము అని అంటారు. క్రమ యుగ్మము (a,b) లో 'a' ను ప్రథమ నిరూపకమనియు, 'b' ద్వితీయ నిరూపకమనియు పిలుస్తారు.

క్రమ యుగ్మాల ముఖ్య ధర్మములు

సాధారణంగా (i) $(a, b) \neq (b, a)$

(ii) $(a, b) = (c, d)$ అయితే $a = c$ మరియు $b = d$

$a = b$ అయినప్పుడే $(a, b) = (b, a)$ అవుతుంది.

6. సమితుల కార్టీసియన్ లబ్దం :

A మరియు B లు ఏవేని రెండు శూన్యేతర సమితులయిన A,B లు కార్టీసియన్ లబ్దం అనునది అన్ని క్రమయుగ్మాలు (a,b) ల సమితి. ఇందులో $a \in A$ మరియు $b \in B$. దీనిని A X B అని రాస్తారు. "A క్రాస్ B" అని చదువుతారు.

సాంకేతికంగా $A X B = \{(a,b) / a \in A$ మరియు $b \in B\}$

గమనించవలసిన విషయాలు :

(i) $A X B \neq B X A$

(ii) $n (A) = m$ మరియు $n (B) = n$ అయిన

$n (A X B) = mn = n (B X A)$

(iii) A, B లు ఏవేని రెండు శూన్యేతర సమతులయి, వీటిలో 'n' సామాన్య మూలకాలు ఉన్నచో, $n(A X B) = n^2$ అవుతుంది.

7. సమితుల మూలకాలసంఖ్య

A అనునది ఏదేని శూన్యేతర సమితి అయిన A లోని మూలకాల సంఖ్యను n (A) గా సూచిస్తారు.

1వ సందర్భం : A మరియు B లు వియుక్త సమితులయిన

$A \cap B = \phi$ అవుతుంది., కాబట్టి

$n (A \cup B) = n (A) + n (B)$

$(\because n (A \cap B) = 0)$

2వ సందర్భం : A మరియు B లు వియుక్త సమితులుకానిచో అనగా $A \cap B \neq \phi$, $n(A) + n (B)$ సామాన్యమూలకాలను రెండు పర్యాయములు గణన లోనికి తీసుకోబడతాయి. కాబట్టి $n(A \cup B)$ అంటే $n (A \cap B)$ మూలకాలు ఎక్కువగా ఉంటాయి.

$\therefore$ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

A,B,C లు ఏ వేని మూడు శూన్యేతర సమితులయిన

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

ఉదా :- A= {1, 2, 3}, B = {x, y} అయితే

(1) A x B = {(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)}

(2) B x A { (x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 30}

(3) A x A { (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1) (3, 2), (3, 3)}

(4) B x B = {(x, x), (x, y), (y, x), (x, y)} అవుతాయి.

8. సమితులకు సంబంధించిన సూత్రాలు

A,B,C లు మూడు సమితులయితే

(i) అపవర్తి నియమాలు

(a) $A \cup A = A_1$

(b) $A \cap A = A$

(ii) స్థిత్యంతర న్యాయాలు

(a) $A \cup B = B \cup A$, (b) $A \cap B = B \cap A$

(iii) సహచర్యన్యాయాలు.

(a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, (b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(iv) విభాగ న్యాయాలు

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(v) తత్సమ న్యాయాలు

(a) $A \cup \phi = A$, (b) $A \cap \cup = A$

(vi) పూరక న్యాయాలు

(a) $A \cup A^1 = \mu$ (b) $A \cap A^1 = \phi$ c) $(A^1)^1 = A$

(d) $\mu^1 = \phi$ (e) $\phi^1 = \mu$

(vii) డీమోర్గాన్ న్యాయాలు.

(a) $(A \cup B)^1 = A^1 \cap B^1$ (b) $(A \cap B)^1 = A^1 \cup B^1$

(c) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(d) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

(viii) లబ్ధ న్యాయాలు.

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

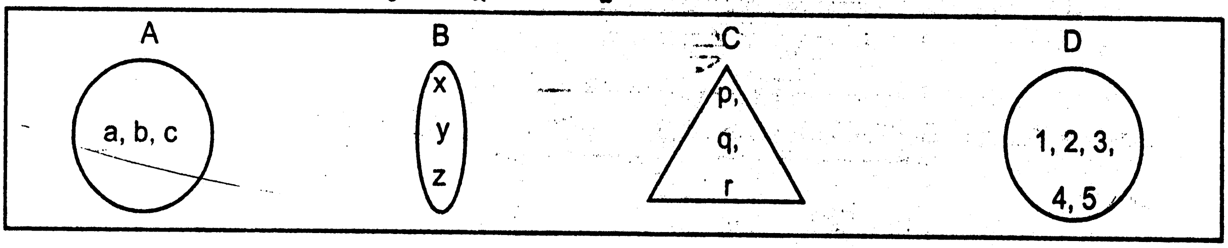
(b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

గమనిక : సమితుల సమానత్వం సూచించే ఏన్యాయంలో అయినా U, $\cap$ మరియు $\cup$, ϕ తారుమారు చేస్తే వచ్చే నియమం సత్యమే.

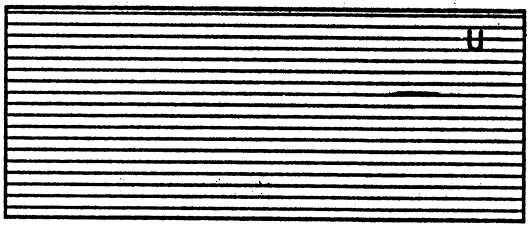
11.5 వెన్ చిత్రాలు (Venn Diagrams)

సమితులను సూచించడానికి సరళ సంవృత పటాలను వాడుతాం. ఈ పటాలను జాన్‌వెన్ అనే ఆంగ్ల గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు (1880) మొదటి సారిగా ప్రయోగించినాడు. స్విట్జర్లాండ్ దేశానికి సంబంధించిన లేహార్డు అయిన్ (1707 - 1783) కూడా వీటిని ఉపయోగించినాడు. కావున వీనిని వెన్-అయిలర్ చిత్రాలు అని అంటారు. వెన్‌చిత్రాలు అని గూడా అంటారు.

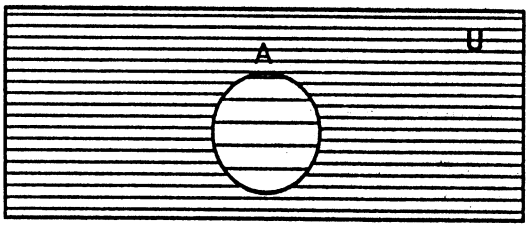
(i) సమితిలను సూచించడానికి ఏసరళ సంవృతపటాన్నైనా వాడవచ్చు.



(ii) విశ్వసమితిని సూచించడానికి సాధారణంగా దీర్ఘచతురస్రాన్ని వాడుతుంటారు.

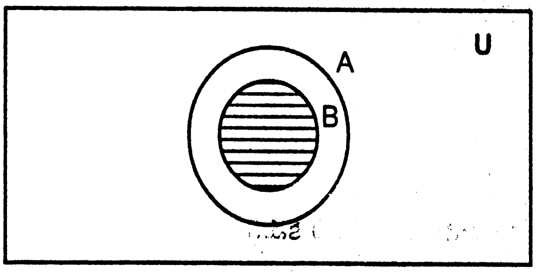


(iii) $A \subset U$ అయిన



U లో A యిమిడి ఉన్నది. లేక A,U లో యిమిడియున్నది $U \supset A$ లేక $A \subset U$

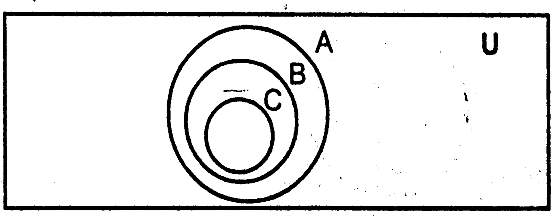
(iv)



$B \subset A$ మరియు $A \subset U$ అయిన B,A లో యిమిడి ఉన్నది.

A,U లో యిమిడి ఉన్నది

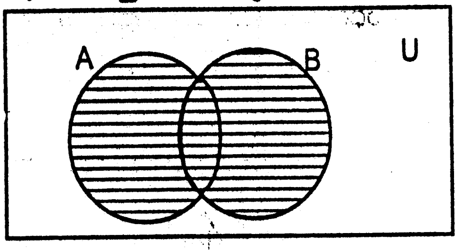
(v) $C \subset B$, $B \subset A$; $A \subset U$ అయిన



C, B లో ఇమిడి యున్నది. B. A లో ఇమిడి యున్నది. A, U లో ఇమిడియున్నది.

11.5.1 సమితుల మౌలిక ప్రక్రియలు వెన్‌చిత్రాలలో

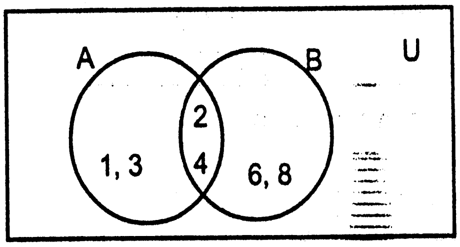
1. **సమితుల సమ్మేళనము :** A, B లు రెండు సమితులు మరియు వీటి సమ్మేళనాన్ని $A \cup B = \{X/X \in A$ లేదా $X \in B$ లేదా $X \in A$ మరియు $X \in B\}$ అని రాస్తారు. వెన్ చిత్రం.



AUB 

ఉదా॥ A= {1,2,3,4}, B= {2,4,6,8} అయిన AUB ని కనుగొనండి

జ॥



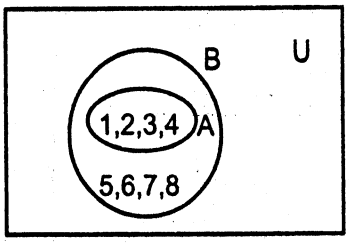
AUB = {1,2,3,4,5,6,7,8}

A సమితిలోగల మూలకాలన్నిటిని వ్రాసి B సమితిలోగల ఉమ్మడి మూలకాలను తొలగించి మిగిలిన మూలకాలన్నిటిని రాయడం.

ఉదా2 :AUB ని సూచించే వెన్ చిత్రాన్ని గీయండి

A = {1,2,3,4}, B= {1,2,3,4,5,6,7,8}

జ॥ $A \subset B$ కావున A,B లో ఉంటుంది.



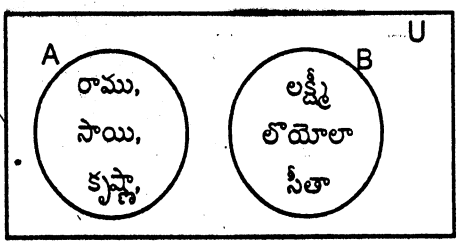
ఉదా3 :A= { రాము, సాయి, కృష్ణా }

B= { లక్ష్మి, లొయోలా, సీతా }

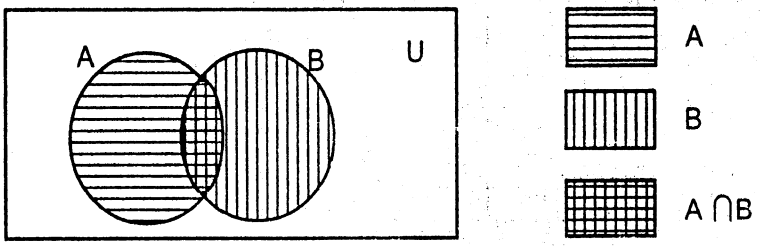
A,B సమితులను వెన్ చిత్రాలలో సూచించండి? మరియు AUB ని కనుగొనండి

జ: A,B లలో ఉమ్మడి మూలకాలులేవు కావున A,B లు వియుక్త సమితులు

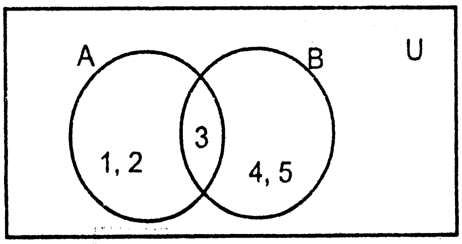
AUB = (రాము, సాయి, కృష్ణా, లక్ష్మి, లొయోలా, సీతా)



2. సమితుల ఛేధనం A,B లు రెండు సమితులు మరియు వీటి చేదనంను $A \cap B = \{X/X \in A$ మరియు $X \in B\}$ అని రాస్తారు. వెన్ చిత్రం.



ఉదా 1 : A= {1,2,3}, B= {3,4,5}, A,B ల ఛేదన సమితిలో గల మూలకాలను వెన్ చిత్రం ద్వారా సూచించండి?



జ: $A \cap B = \{3\}$

ఉదా 2 : A,B సమితులను గమనించండి, A= {2,3,5}, B= {4,6,8}

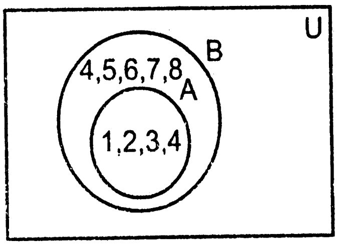
జ : A, B లు వియుక్తసమితులు చేదన సమితి శూన్య సమితి, $A \cap B = \{\ \}$

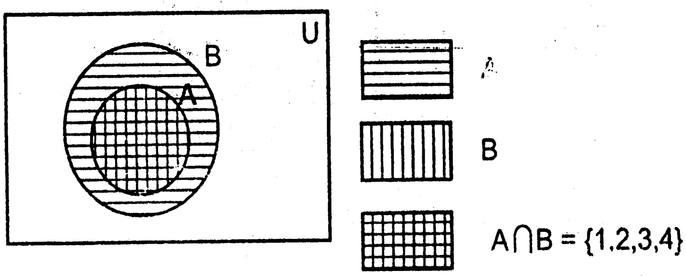
ఉదా 3 : A= {1,2,3,4}, B= {1,2,3,4,5,6,7,8} $A \cap B$ ని కనుగొనండి మరియు $A \cap B$ ని వెన్‌చిత్రాలద్వారా చూపండి.

జ : $A \cap B = \{1,2,3,4\}$, $A \cap B$ లో A లోను మరియు B లో గల ఉమ్మడి మూలకాలుమాత్రమే ఉంటాయి.

A అనేది B యొక్క ఉపసమితి కావున $A \cap B = A$

$A \cap B$ ని వెన్ చిత్రం ద్వారా



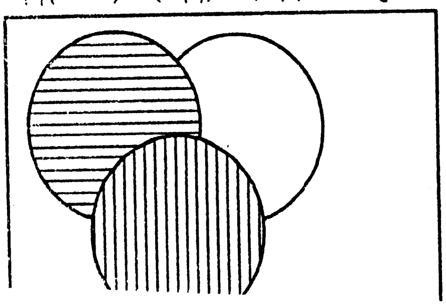


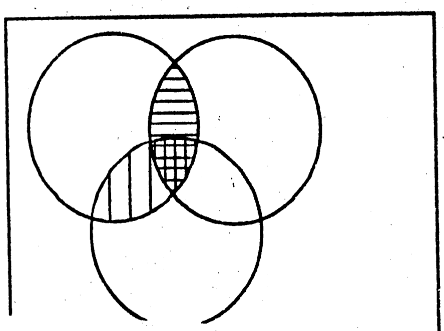
3. విభాగన్యాయాలు

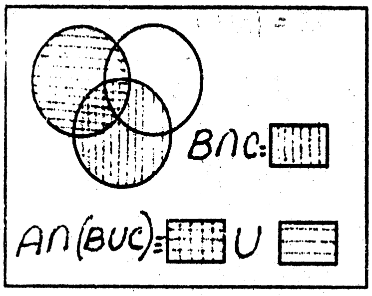
A,B,C లు సమితులు

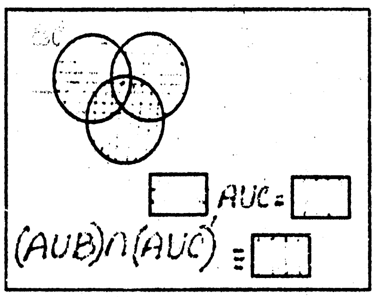
(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap) \cup (A \cap C)$ సూత్రాల వెన్ చిత్రాలు.







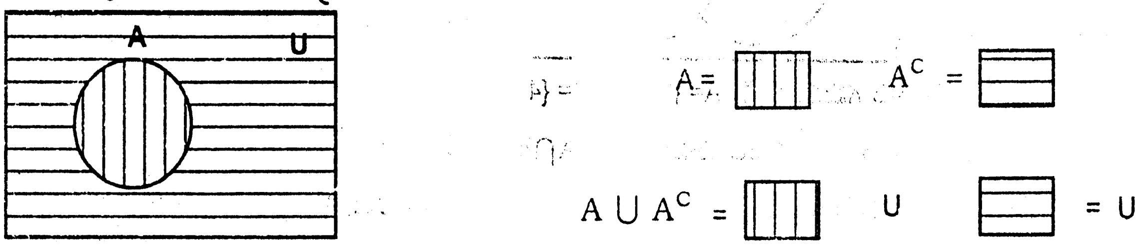


A∩(BUC) మరియు (A∩B) U (A∩C) లు ఒకే ప్రదేశాన్ని సూచిస్తున్నాయి. కావున

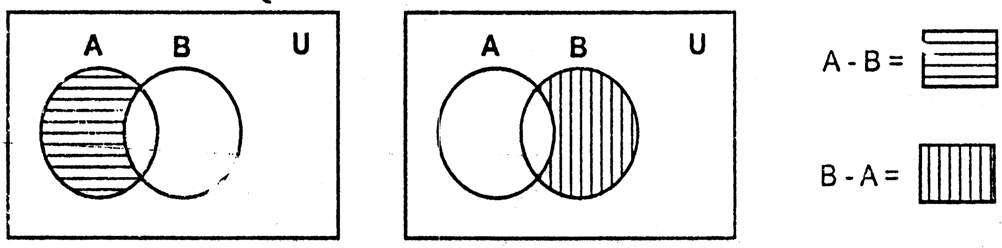
A∩(BUC) = (A∩B) U (A∩C)

4. సమితి పూరకం

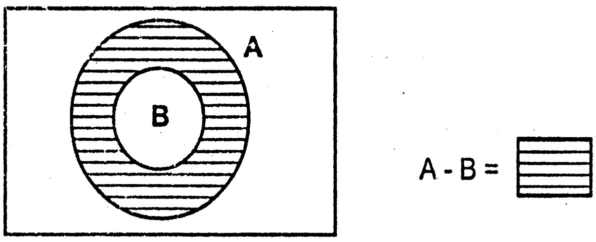
(1) A సమితి పూరక సమితిని వెన్ చిత్రం



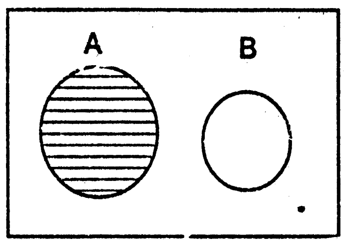
(2) A - B, B - A లను వెన్ చిత్రాలు



(3) B⊂ A అయితే వెన్ చిత్రం.

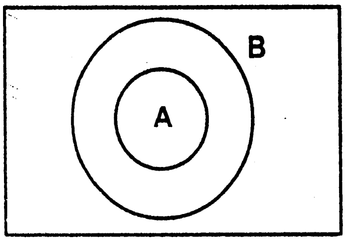


(4) A ∩ B = φ అయితే లేక A, B లు వియుక్త సమితులైతే A - B = A



A - B = A

(5) $A - B = \phi$ అయితే $A \cap B$ అయితే $A - B = \phi$



$A - B = \phi$

11.6 డిమోర్గన్ న్యాయము (De-morgan Laws)

A,B,C లు ఏవేని రెండు శూన్యేతర సమితులయిన

(1) $(AUB)^1 = A^1 \cap B^1$,

(2) $(A \cap B)^1 = A^1 U B^1$

(3) $A - (BUC) = (A - B) \cap (A - C)$

(4) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

లను డి-మోర్గాన్ న్యాయములు

(1) $(AUB)^1 = A^1 \cap B^1$ అని నిరూపించండి

సాధన $(AUB)^1 = A1 \cap B^1$ అని నిరూపించుటకు

(i) $(AUB)^1 \subset A^1 \cap B^1$ అని నిరూపించాలి

$X \notin (A \cap B)^1$ అనుకొనగా

$\Rightarrow X \notin (A \cup B)$

$\Rightarrow (X \notin A$ మరియు $X \notin B)$

$\Rightarrow X \in A^1$ మరియు $X \in B^1$

$\Rightarrow X \in A^1 \cap B^1$

$\therefore (A \cup B)^1 \subset A^1 \cup B^1$ ....(i)

(ii) $X \in A^1 \cap B^1$ అనుకొనగా

$\Rightarrow X \in A^1$ మరియు $X \in B^1$

$\Rightarrow X \notin A$ మరియు $X \notin B$

$\Rightarrow X \notin (A \cup B)$

$\Rightarrow X \in (A \cup B)^1$

$\therefore A^1 \cup B^1 \subset (A \cup B)^1$ ....(ii)

(i) మరియు (ii) ల నుండి $(A \cup B)^1 = A^1 \cap B^1$ అని నిరూపించబడినది.

ఇదేవిధంగా $(A \cap B)^1 = A^1 \cup B^1$ అని నిరూపించవచ్చు.

(2) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ అని నిరూపించండి

సాధన : $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ అని నిరూపించుటకు

(i) $A - (B \cap C) \subset (A - B) \cup (A - C)$ మరియు

(ii) $(A - B) \cup (A - C) \subset A - (B \cap C)$ అని నిరూపించాలి

(i) $X \in A - (B \cap C)$ అనుకొనగా

$\Rightarrow X \in A$ మరియు $X \notin (B \cap C)$

$\Rightarrow X \in A$ మరియు ($X \notin B$ లేదా $X \notin C$)

$\Rightarrow$ ($X \in A$ మరియు $X \notin B$) లేదా ($X \in A$ మరియు $X \notin C$)

$\Rightarrow X \in (A - B)$ లేదా $X \in (A - C)$

$\Rightarrow X \in (A - B) \cup (A - C)$

$\therefore A - (B \cap C) \subset (A - B) \cup (A - C)$..................................(i)

(ii) $X \in (A - B) \cup (A - C)$ అనుకొనగా

$\Rightarrow X \in (A - B)$ లేదా $X \in (A - C)$

$\Rightarrow$ ($X \in A$ మరియు $X \notin B$) లేదా ($X \in A$ మరియు $X \notin C$)

$\Rightarrow X \in A$ మరియు $X \notin B$ లేదా $X \notin C$

$\Rightarrow X \in A$ మరియు ($X \notin (B \cap C)$)

$\Rightarrow X \in A - (B \cap C)$

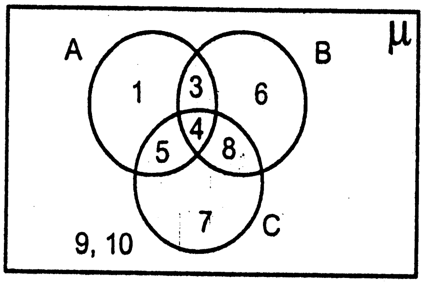
$\therefore (A - B) \cup (A - C) \subset A (B \cap C)$ ....(ii)

(i) మరియు (ii) వలన $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ అని నిరూపించబడినది

ఇదేవిధంగా $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ అని నిరూపించవచ్చు.

ఉదా: 1. క్రింది వెన్ చిత్రాన్ని అధ్యయనం చేసి. కింద పేర్కొన్న సమితులలోని మూలకాలను కనుగొనండి.

(i) $(A \cap B) \cup C$ (ii) $A^1 \cap B^1$ (iii) $(A \cup B) \cap C$ (iv) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$



సాధన: $A = \{1, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 6, 8\}$

$C = \{4, 5, 7, 8\}$, $\mu = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(i) $A \cap B = \{1, 3, 4, 5\} \cap \{3, 4, 6, 8\} = \{3, 4\}$

$(A \cap B) \cup C = \{3, 4\} \cup \{4, 5, 7, 8\} = \{3, 4, 5, 7, 8\}$

(ii) $A^1 = \mu - A = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} - \{1, 3, 4, 5\}$

$= \{6, 7, 8, 9, 10\}$

$B^1 = \mu - B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} - \{3, 4, 6, 8\}$

$= \{1, 5, 7, 9, 10\}$

$A^1 \cap B^1 = \{6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{1, 5, 7, 9, 10\} = \{7, 9, 10\}$

(iii) $A \cup B = \{1, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 6, 8\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$

$(A \cup B) \cap C = \{1, 3, 4, 5, 6, 8\} \cap \{4, 5, 7, 8\} = \{4, 5, 8\}$

(iv) $B \cup C = \{3, 4, 6, 8\} \cup \{4, 5, 7, 8\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$(A \cup B) \cap (B \cup C) = \{1, 3, 4, 5, 6, 8\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$= \{3, 4, 5, 6, 8\}$

ఉదా 2 : A లోని మూలకాల సంఖ్య 15, B లోని మూలకాల సంఖ్య 20. $A \cup B$ లోని మూలకాల సంఖ్య 30 అయిన $A \cap B$ లోని మూలకాల సంఖ్యను కనుగొనండి

సాధన : $n(A) = 15$, $n(B) = 20$ మరియు $n(A \cup B) = 30$ అని మనకు తెలుసు

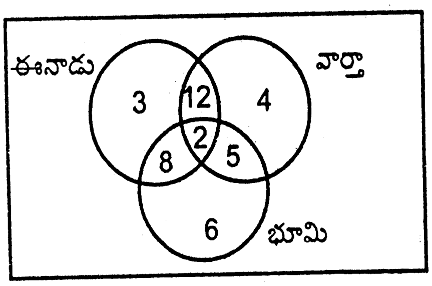
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$30 = 15 + 20 - n(A \cap B)$

$\therefore n(A \cap B) = 5$

11.7 సమితిశాస్త్రం యొక్క అనువర్తనములు (Applications of set theory)

ఉదా 1 : క్రింది చిత్రం వార్త పత్రికలను చదివే వారిని సూచిస్తున్నాయి. ఈ వెన్‌చిత్రాన్ని 50 మందిని సర్వే చేశాక రూపొందించడం జరిగింది. అయిన 10,000 మంది జనాభాలో ఎంత మంది కనీసం రెండు వార్త పత్రికలను చదువుచున్నారో కనుగొనండి.



సాధన :

రెండు అంతకన్న ఎక్కువగానీ వార్తపత్రికలను చదివేవారి సంఖ్య = 12 + 8 + 2 + 5 = 27

కావలసిన సంఖ్య = $\frac{27}{50} \times 10,000 = 5400$

ఉదా 2 : వేటకు వెళ్ళిన ఒక వ్యక్తిని అతని సంచిలో ఎన్ని పక్షులున్నాయని అడుగగా, రెండుతప్ప అన్నీ చిలుకలే, రెండు తప్ప అన్నీ గోరింకలే, రెండు తప్ప అన్నీ పావురాలే అని అతడు సమాధాన మిచ్చాడు. అయిన అతని సంచిలో వున్న మొత్తం పక్షులెన్ని?

సాధన : సంచిలోని మొత్తం పక్షుల సంఖ్యను X అనుకొందాం.

చిలుకల సంఖ్య = n (చి) = X – 2

గోరింకల సంఖ్య = n (గో) = X – 2

పావురాల సంఖ్య = n (పా) = X – 2

సంచిలోని మొత్తం పక్షులు X = n (చి ∪ గో ∪ పా)

$\therefore$ n (చి U గో U పా) = n (చి) + n (గో) + n (పా).

$\therefore$ చిలుకలు, గోరింకలు మరియు పావురాలు అన్నీ స్వతంత్రాలు

$\therefore$ x = n (చి U గో U పా) = x - 2 + x - 2 + x - 2

$x = 3x - 6$

$2x = 6$

x = 3 పక్షులు

ఉదా : 3. తెలుగు, హిందీ భాషల్లో నిర్వహించిన ఒక వ్యక్తిత్వపోటీలో ఒక పాఠశాలకి చెందిన 80 మంది విద్యార్థులలో 45 మంది తెలుగు, 35 మంది హిందీ, 15 మంది తెలుగు హిందీలలో పాల్గొన్నారు. అయిన (i) తెలుగులో పాల్గొని హిందీలో పాల్గొననివారు (ii) హిందీలో పాల్గొని తెలుగులోపాల్గొనని వారు (iii) హిందీలో గాని, తెలుగులో గాని పాల్గొనిన వారు (iv) ఈ రెంటిలో వానిలోనూ పాల్గొననివారు ఎందరో కనుగొనండి?

సాధన : తెలుగులో పాల్గొనిన వారి సమతి T తో, హిందీలో పాల్గొనినవారి సమితిని H తో సూచిస్తే, హిందీ తెలుగు రెంటిలోపాల్గొన్న వారి సమితి $T \cap H$ అవుతుంది.

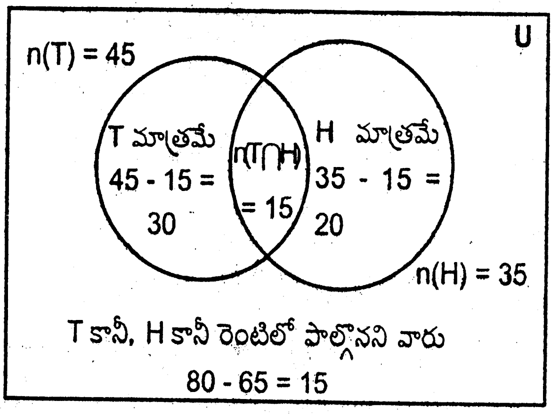
(i) తెలుగులో పాల్గొని హిందీలో పాల్గొనని వారి సంఖ్య = n (T) – N ($T \cap H$) = 45–15 = 30

(ii) హిందీలో మాత్రమే పాల్గొనిన వారి సంఖ్య = n (H) – n ($T \cap H$) = 35 – 15 = 20

(iii) n (T U H) = n (T) + N (H) – n ($T \cap H$) = 45 + 35 – 15 = 65

(iv) ఈ రెండు భాషలలో వేనిలోనూ పాల్గొనని వారి సంఖ్య = 80 – 65 = 15

ఈ విషయాలను కింది వెన్‌చిత్రం ద్వారా సులభంగా సాధించవచ్చు.



ఉదా 4 : ఒక తరగతిలో 50 మంది విద్యార్థులు కలరు. వీరిలో 42 మంది గణితంలో ఉత్తీర్ణులైరి. 35 మంది సైన్సులో ఉత్తీర్ణులైరి. 30 మంది రెండింటిలో ఉత్తీర్ణులయ్యారు. రెండింటిలోను తప్పిన వారు ఎందరు? గణితం మాత్రం ఉత్తీర్ణులైనవారు మరియుసైన్సులో మాత్రం ఉత్తీర్ణులైనవారు ఎందురు?

సాధన : గణితంలో ఉత్తీర్ణులు = n (M) = 42

సైన్సులో ఉత్తీర్ణులు = n (S) = 35

రెండింటిలో ఉత్తీర్ణులు = n ($M \cap S$) = 30

గణితంలో గాని, సైన్సులోగాని ఉత్తీర్ణులు = n (M U S)

n (M U S) = n (M) + N (S) – n ($M \cap S$)

= 42 + 35 – 30 = 47 మంది

రెండింటిలో తప్పిన వారి సంఖ్య = 50 – 47 = 3 మంది

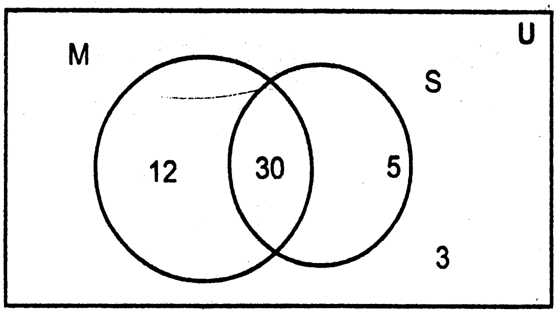
గణితంలో మాత్రం ఉత్తీర్ణులైనవారు $= n(M) - n(M \cap S)$

$= 42 - 30 = 12$ మంది

సైన్సులో మాత్రం ఉత్తీర్ణులైనవారు $= n(S) - n(M \cap S)$

$= 35 - 30 = 5$ మంది

ఈ సమస్య సాధనకు వెన్ చిత్రం క్రింద విధంగా రాయవచ్చు.



ఉదా 5 : ఒక పాఠశాల నుండి పరీక్షకు హాజరైన 100 మంది విద్యార్థులలో 15 మందికి ఇంగ్లీషులోను, 12 మంది గణితంలోనూ, 8 మందికి సైన్స్‌లోనూ, 7 మందికి గణితం, సైన్స్‌లోనూ; 4 గురికి ఇంగ్లీషు, సైన్స్‌లోనూ; 6 గురికి ఇంగ్లీషు, గణితంలోనూ, 4 గురికి మూడింటిలోనూ ప్రథమ శ్రేణి మార్కులు లభించాయి. ఎంతమంది విద్యార్థులకు (i) గణితంలో మాత్రం (ii) సైన్స్‌లో మాత్రం (iii) ఇంగ్లీషులో మాత్రం (iv) సరిగ్గా రెండు విషయాలలో మాత్రం (v) ఒకటి కంటే ఎక్కువ విషయాలలో ప్రథమ శ్రేణి మార్కులు లభించాయి.

సాధన : (i) గణితంలో మాత్రమే ప్రథమశ్రేణి మార్కులు వచ్చినవారు.

$= n(M) - n(E \cap M) - n(M \cap S) + n(E \cap M \cap S) = 12 - 6 - 7 + 4 = 3$

(ii) ఇంగ్లీషులో మాత్రమే ప్రథమ శ్రేణి మార్కులు వచ్చినవారు.

$= n(E) - n(E \cap M) - n(E \cap S) + n(E \cap M \cap S) = 15 - 6 - 4 + 4 = 9$

(iii) సైన్స్‌లో మాత్రమే ప్రథమ శ్రేణిమార్కులు వచ్చినవారు

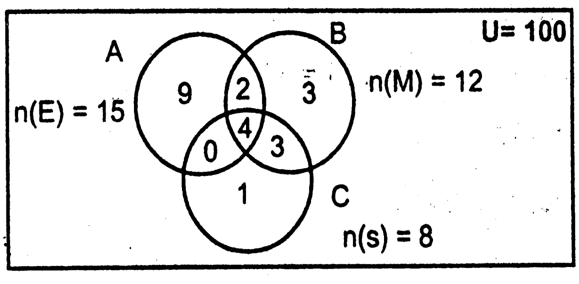
$= n(S) - n(M \cap S) - n(S \cap E) + n(M \cap E \cap S) = 8 - 4 - 7 + 4 = 1$

(iv) సరిగ్గా రెండు విషయాల్లో మాత్రమే ప్రథమ శ్రేణిమార్కులు పొందిన వారు.

$= 0 + 2 + 3 = 5$

(v) ఒకటి కంటే ఎక్కువ విషయాల్లో ప్రథమ శ్రేణిమార్కులు పొందినవారు $= 2 + 0 + 4 + 3 = 9$

ఈ విషయాలను వెన్‌చిత్రం ద్వారా సులభంగా సాధించవచ్చు.



ఉదా 6 : ఒక తరగతిలోని 120 మంది విద్యార్థులలో 50 మంది క్రికెట్, 60 మంది ఫుట్‌బాల్, 48 మంది హాకి, 18 మంది క్రికెట్, హాకి 10 మంది క్రికెట్, ఫుట్‌బాల్, 24 మంది హాకీ ఫుట్‌బాల్, 10 మంది మూడింటిని ఆడతారు (i) క్రికెట్ మాత్రం ఆడేవారు ఎందురు? (ii) ఏదీ ఆడనివారుఎందురు? (iii) హాకీ మాత్రమే ఆడేవారు ఎందురు? (iv) ఫుట్‌బాల్ మాత్రం ఆడేవారు ఎందురు? (v) ఏవేని రెండు ఆటలు ఆడేవారు ఎందురు? (vi) రెండుగాని అంతకన్నా ఎక్కువ ఆటలు ఆడేవారుఎందురు. (vii) ఒక్కొక్క ఆట మాత్రమే ఆడేవారు ఎందురు?

సాధన : తరగతిలో విద్యార్థులు = 120

క్రికెట్ ఆడేవారు = $n(C) = 50$

ఫుట్‌బాల్ ఆడేవారు = $n(F) = 60$

హాకీ ఆడేవారు = $n(H) = 48$

హాకీ, క్రికెట్ ఆడేవారు = $n(H \cap C) = 18$

క్రికెట్, ఫుట్‌బాల్ ఆడేవారు = $n(C \cap F) = 20$

హాకీ, ఫుట్‌బాల్ ఆడేవారు = $n(H \cap F) = 24$

మూడు ఆటలు ఆడేవారు = $n(H \cap F \cap C) = 10$

క్రికెట్ గాని హాకీగాని, ఫుట్‌బాల్ గాని ఆడేవారు = $n(H \cup F \cup C)$.

$n(H \cup F \cup C) = n(H) + n(F) + N(C) - n(H \cap F) - n(C \cap F) - n(H \cap C) + n(H \cap F \cap C)$

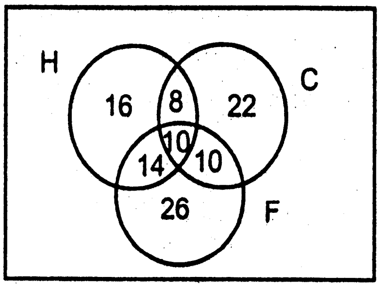
$= 48 + 60 + 50 - 24 - 20 - 18 + 10 = 168 - 62 = 106$

(i) క్రికెట్ మాత్రం ఆడేవారు = $n(C) - n(H \cap C) - n(C \cap F) + n(H \cap F \cap C)$

$= 50 - 18 - 20 + 10 = 20$ మంది

(ii) ఏదీ ఆడనివారు = $120 - 106 = 14$ మంది

దీనిని క్రింది విధంగా వెన్ చిత్రం ద్వారా సాధించవచ్చు.



పై వెన్ చిత్రంద్వారా అనేక ప్రశ్నలకు జవాబులు సులువుగా చెప్పవచ్చు.

(iii) హాకీ మాత్రమే ఆడేవారు = 16

(iv) ఫుట్‌బాల్ మాత్రమే ఆడేవారు = 26

(v) ఏవేని రెండు ఆటలు ఆడేవారు = 8 + 14 + 10 = 32

(vi) రెండుగాని అంతకన్నా ఎక్కువ ఆటలు ఆడేవారు = 8 + 14 + 10 + 10 = 42

(vii) ఒక్కొక్క ఆటమాత్రమే ఆడేవారు = 16 + 26 + 22 = 64

అభ్యాసము

1. $A = \{1,3,5,7\}$, $B=\{1,2,3,4,5,6\}$, $C = \{5,6,7,9\}$

అయిన (i) $A \cup B$ (ii) $B \cup A$ (iii) $B \cup C$ (iv) $C \cup A$ (v) $A \cup C$ లను కనుగొనండి.

2. $A = \{1,3,5,8\}$, $B = \{2,3,5,6\}$, $C = \{3,6,7,8\}$ అయిన
(i) $A \cup B$ (ii) $B \cup C$ (iii) $A \cup (B \cup C)$ (iv) $(A \cup B) \cup C$ లను కొనుగొనండి.

3. $\mu = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
సరిసహజ సంఖ్యలసమితి $E = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$
బేసిసహజ సంఖ్యల సమితి $O = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$
అయిన (i) E^1, (ii) O^1 (iii) $E^1 \cup O^1$ (iv) $E \cap O$ లను కొనుగొనండి.

4. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ అయిన (i) $A - B$ (ii) $B - A$ లను కొనుగొనండి.

5. $X = \{1, 2, 3\}$, $y = \{a, b, c\}$ అయిన $X \times Y$ కనుగొనండి.

6. $n(A) = 20$, $n(B) = 40$, $n(A \cup B) = 50$ అయిన (i) $n(A - B)$, (ii) $n(A \cap B)$ లను కొనుగొనండి.

7. $n(X) = 67$, $n(Y) = 46$, $n(Z) = 40$, $n(X \cap Y) = 28$,
$n(Y \cap Z) = 8$, $n(X \cap Z) = 26$, $n(X \cap Y \cap Z) = 2$ అయిన $n(X \cup Y \cup Z)$ లను కనుగొనండి.

8. $n(A \cup B) = 50$, $n(A) = 30$, $n(A \cap B) = 12$ అయిన $n(B)$ ను కొనుగొనండి.

9. $n(A \cup B) = 50$, $n(A) = 35$, $n(B) = 30$, $n(A^1 \cap B^1) = 5$ అయిన $n(A \cap B)$ ను కనుగొనండి.

10. ఒక తరగతిలో 20 మంది గణితము, 7 మంది సాంఘిక శాస్త్రం, 10 మంది గణితము మరియు సాంఘిక శాస్త్రం చదివెదరు. అయిన ఆ తరగతిలోని విద్యార్థులెందరు?

11. 100 మంది విద్యార్థులుగల తరగతిలో 70 మంది సామాన్యశాస్త్రం, 60 మంది గణితము మరియు 40 మంది రెండింటినీ చదివెదరు. అయిన గణితము లేదా సామాన్య శాస్త్రము లేదా రెండింటిని చదువని వారెందరు?

12. ఒక తరగతిలోని విద్యార్థుల్లో 12 మందికి గణితంపై (M) ఆసక్తి, 16 మందికి రసాయనిక శాస్త్రంపై (c) ఆసక్తి మరియు 21 మందికి భౌతిక శాస్త్రం (P) అంటే ఇష్టం. 5 గురికి M మరియు C లలో మక్కువ. 8 గురికి M మరియు P లంటే ఇష్టం. 12 గురికి P మరియు C లంటే ఇష్టం కాగా ముగ్గురికి మూడు విషయాలపై ఆసక్తి అయితే, ఆ తరగతిలో P పైగాని M పైగాని లేదా C పైగాని శ్రద్ధచూపే విద్యార్థులెందరు?

13. ఒక హాస్టలులోని విద్యార్థుల గురించి వచ్చిన ఫిర్యాదులు మూడు విధాలుగ ఉన్నాయి. అవి (i) పాకశాల (M) (ii) ఆహారం (F) (iii) వడ్డన (S) మొత్తం అందిన ఫిర్యాదులసంఖ్య 173 అవి ఈ క్రింది విధంగా ఉన్నాయి.
$n(M) = 110$, $n(F) = 55$, $N(S) = 67$
$n(M \cap F \cap S^1) = 20$, $n(M \cap S \cap F^1) = 11$, $n(F \cap S \cap M^1) = 16$
(i) మూడింటిని గూర్చి (ii) రెండు లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ వానిని గూర్చి ఎన్ని ఫిర్యాదులు వచ్చినవో నిర్ణయించండి.

14. ఒక నగరంలో మూడు వార్తా పత్రికలు A,B,C లు చలామణిలో ఉన్నాయి. నగరంలోని 35% మంది వీటిలో కనీసం రెండింటినైనా చదువుతారు. అంతేకాక నగరంలోని జనాభాలో 45% మంది C ని చదువుతారని, A మరియు B రెండింటినీ చదివే వారు 15% మంది అనీ మరియు మూడింటినీ చదవేవారు 10% అనీ తెలిసింది. అయితే జనాభాలో C ని మాత్రమే చదివేవారెందరు.

15. ఒక సర్వేలో కింది విషయాలు వెల్లడయ్యాయి. 35 మంది విద్యార్థులకు వినోదము, 20 మంది నవలలు, 17 మందికి జీవిత చరిత్రలు అంటే ఇష్టమని తేలింది వీరిలో 7 గురికి వినోదము, నవలలు; 4 గురికి నవలలు, జీవిత చరిత్రలు, 6 గురికి వినోదము, జీవితచరిత్రలు, ఇష్టమని తేలింది. కాగా మూడింటినీ ఇష్టపడేవారు ఇద్దరే అయితే ఆసర్వేలో ఎంత మంది విద్యార్థులను విచారించిరి?

పాఠం - 12

ఘాత సిద్ధాంతములు

ఈ పాఠ్యాంశములో సంఖ్యను ఘాతము చేయనపుడు వాటి లక్షణములు గురించి తెలుసుకొంటాము

1) ఉపోద్ఘాతము

2) ఘాత సిద్ధాంతములు

3) మాదిరి సమస్యలు

4) సారాంశములు

5) అభ్యాసములు

గణాంక శాస్త్రము యొక్క సరియైన సామర్థ్యమును తెలుసుకొనుటకు కొన్ని గణిత శాస్త్ర సంబంధమైన భావములు తప్పనిసరిగా తెలిసిఉండాలి. ఈ భావము సూక్ష్మీకరణ తెలియకపోయినను వీటి ఆవశ్యకత గణాంక శాస్త్ర అధ్యయనంలో నిర్వచనం వరకు తెలియవలెను. ఈ నేపద్యంలో మనము నేర్చుకొనే కొన్ని తప్పనసరి గణిత శాస్త్ర సంబంధిత అంశములలో ఘాత సిద్ధాంతములు (Laws of Indices) ఒకటి అవి అతి ప్రాధమిక స్థాయిలో మనము ఈ పాఠములో నేర్చుకుందాము.

1. ఉపోద్ఘాతం

ఏదయినా సంఖ్య p/q రూపంలో $q \neq 0$ మరియు p,q లు పూర్ణాంకములు అగునట్లు వ్రాయగలిగితే దానిని ఆకరణీయ సంఖ్య అని అంటాము. 'a' ఒక శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్య, m ఒక ఆకరణీయ సంఖ్య అయితే $a.a....a$ లల (mసార్లు) లబ్దాన్ని a^m గా వ్రాస్తారు.

a^m ను a యొక్క m వ ఘాతమని పిలుస్తారు.

a^m లో a భూమి, m ను ఘాతాంకమని అంటారు.

$a^{\frac{1}{m}}$ ను $\sqrt[m]{a}$ తో సూచిస్తారు. $a^{\frac{1}{2}}$ క్లుప్తంగా $\sqrt{a}$ అని అంటారు.

2. ఘాతాంక సిద్ధాంతములు

a, b లు శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్యలయి వుండి m, n లు అకరణీయ సంఖ్యలు అయితే క్రింది వాటినే ఘాతాంక సిద్ధాంతాలు అని అంటాము.

1) $a^m . a^n = a^{m+n}$ (ఒకే భూమి కలిగిన రెండు ఘాతములు గుణకార ము చేయవలెనన్న, ఘాతాంకమును సంకలనము చేయవలెను)

2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (ఒకే భూమి కలిగిన రెండు ఘాతములు భాగించవలెనన్న ఘాతాంకముల భేదము చేయవలెను)

3) $(ab)^n = a^n b^n$ (రెండు సంఖ్యలను గుణకారము చేసిన ఘాతము, రెండు ఘాతముల గుణకారము సమానంగా ఉంటుంది)

4) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ (రెండు సంఖ్యలను భాగించి ఘాతము చేయగా వచ్చిన సంఖ్య, ఆ రెండు ఘాతములను భాగించగా వచ్చు సంఖ్యకు సమానము)

ఉదా : i) $2^7, 2^9 = 2^{7+9} = 2^{16}$

ii) $\frac{5^7}{5^2} = 5^{7-2} = 5^5$

iii) $(x\,y)^7 = x^7, y^7$

iv) $\left(3^5\right)^2 = 3^{5.2} = 3^{10}$

v) $3^{(5)^2} = 3^{25}$

vi) $\left(\frac{2}{7}\right)^9 = \frac{2^9}{7^9}$

ఘతాంక సిద్ధాంతాలు వినియోగించి క్రింది సిద్ధాంతాలు వ్రాసెదము.

సిద్ధాంతము 1 : $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = 1$ అనగా $a^0=1$ a అకరణీయ సంఖ్య

ఉదా : $(2576)^0 = 1,\ 1^0=1$

సిద్ధాంతము 2 : $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$

$1 = a^0$ అని వ్రాసిన $\frac{1}{a^m} = \frac{a^0}{a^m} = a^{o-m} = a^{-m}$

ఉదా : $\frac{1}{9^2} = 9^{-2}$, $\frac{1}{2^{-7}} = 2^{-(-7)} = 2^7$

సిద్ధాంతము 3 : $a^m=a^n$ అయినచో $m=n$ అవుతుంది.

ఉదా : $2^x = 2^7 \Rightarrow 2^x.2^{-7} = 2^7\ .\ 2^{-7} \Rightarrow 2^{x-7} = 2^0$

$\Rightarrow x - 7 = 0 \qquad \Rightarrow x = 7$

సిద్ధాంతము 4 : n ఒక అకరణీయ సంఖ్య అయివుండి 'a' ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయినచో

$\sqrt[n]{a^n} = a$ మరియు $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}.n} = a^1 = a$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{1/n}\right)^n = a^{\frac{1}{n}n} = a^1 = a$$

ఉదా : 1) $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$ 2) $\left(\sqrt[7]{49}\right)^7 = 49$

సిద్ధాంతము 5 : A ఒక అకరణీయ సంఖ్య అయివుండి a, b లు వాస్తవ సంఖ్యలయిన $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

$$\sqrt[n]{ab} = (ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

ఉదా : $\sqrt[3]{27.15} = \sqrt[3]{27}\ \sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{3^3}\ \sqrt[3]{15} = 3.\sqrt[3]{15}$

సిద్ధాంతము 6: m, n లు అకరణీయ సంఖ్యలయివుండి a వాస్తవ సంఖ్య అయినచో $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a^{m-n}}$

$$\sqrt[n]{a} / \sqrt[m]{a} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{m}}} = a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}} = a^{\frac{m-n}{mn}} \qquad = \left(a^{m-n}\right)^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{m-n}}$$

ఉదా : $\dfrac{\sqrt[7]{32}}{\sqrt[5]{16}} = \dfrac{\sqrt[7]{2^5}}{\sqrt[5]{2^4}} = 2^{\frac{5}{7}} - 2^{-4/5} = \sqrt[35]{2^{25-28}} = \sqrt[35]{2^{-3}}$

3) **మాదిరి సమస్యలు**

1) $3^{-2}.\ 3^{7}$ విలువ ఎంత?

$3^{-2+7} = 3^5$

2) సూక్ష్మీకరించుము $\dfrac{a^5.a^6.b^{-4}}{a^{-2}\ b^{-2}\ c^4}$

సాధన $\dfrac{a^5.\ a^6\ .\ b^{-4}}{a^{-2}\ b^{-2}\ c^4} = \dfrac{a^{5+6}\ .\ b^{-4}}{a^{-2}\ b^{-2}\ c^4}$

$$= \frac{a^{11}}{a^{-2}} \cdot \frac{b^{-4}}{b^{-2}} \cdot \frac{1}{c^4} = a^{11+2}\ b^{-4+2}\ c^{-4} = a^{13}\ b^{-2}\ c^{-4}$$

3) సూక్ష్మీకరించుము $\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 \left(\sqrt[5]{a}\right)^{-1} \div \sqrt[4]{a^2}\ .\ (b^2)^{-\frac{1}{4}}$

సాధన :- $\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 \left(\sqrt[5]{a}\right)^{-1} \div \sqrt[4]{a^2}\ .\ (b^2)^{-\frac{1}{4}}$

$$\frac{(a^{\frac{1}{3}})^2\ \ (a^{\frac{1}{5}})^{-1}}{(a^2)^{\frac{1}{4}}\ \ (b^2)^{\frac{-1}{4}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}\ \ a^{\frac{-1}{5}}}{a^{\frac{2}{4}}\ \ b^{\frac{-2}{4}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}\ a^{\frac{-1}{5}}}{a^{\frac{2}{4}}\ b^{\frac{-2}{4}}}$$

$$= a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{2}{4}}\ .\ b^{\frac{2}{4}} \qquad = a^{\frac{20-6-15}{30}} \qquad b^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{30}}\quad b^{\frac{1}{2}}$$

4) సూక్ష్మీకరించుము $2^{n-2}\ 4^n\ 8^{4n-3} \div (64)^{n-3}\ (32)^{n-1}$

సాధన :- $4 = 2^2,\ 8=2^3,\ 32=2^5,\ 64 = 2^6$

కావున $2^{n-2}\ 4^n\ 8^{4n-3} = 2^{n-2}\ (2^2)^n\ (2^3)^{4n-3} = 2^{n-2}\ 2^{2n}\ 2^{12n-9} = 2^{n+2n+12n-2-9} = 2^{15n-11}$

$(64)^{n-3}\ (32)^{n-1} = (2^6)^{n-3}\ \ (2^5)^{n-1} = 2^{6n-18}\ \ 2^{5n-5} = 2^{11n-23}$ ఈ విలువలను రాయగా

$2^{n-2}\ 4^n\ 8^{4n-3} \div (64)^{n-3}\ \ (32)^{n-1} = \dfrac{2^{15n-11}}{2^{11n-23}} = 2^{15n-11n-11+23} = 2^{4n+12}$ అవుతుంది

5) $\dfrac{2^{n+1}\ 2^{n}\ 2^{2n}}{(2^{m+1})\ \ 2^{2m}} = 1$ అయిన m విలువ ఎంత?

సాధన : $\dfrac{2^{n+1}\ 2^{n}\ 2^{2n}}{2^{m+1}\ \ 2^{2m}} = 1$ అయిన

$2^{n+1+n+2n} = 2^{m+1+2m}$ అవుతుంది

$\Rightarrow\ 4n+1 = 3m+1 \Rightarrow 3m = 4n \Rightarrow m = \dfrac{4}{3}n$ అవుతుంది

6) $a^{\frac{2}{3}}\left[a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^{4}\right]^{\frac{1}{4}}$ విలువ కనుగొనుము

సాధన : ముందుగా $[()]$ లు సాధించెదము

$$a^{\frac{2}{3}}\left[a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^{4}\right]^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{3}}\left[a^{\frac{1}{3}}\ a^{\frac{1}{4}.4}\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$= a^{\frac{2}{3}}\left[a^{\frac{1}{3}}a\right]^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{3}}\left[a^{\frac{1}{3}+1}\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$a^{\frac{2}{3}}\left[a^{\frac{4}{3}}\right]^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{3}}\left[a^{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}}\right] = a^{\frac{2}{3}}\ .\ a^{\frac{1}{3}}$$

$$= a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{3}} = a^{1} = a$$

7) $2^{x+5} = 43^{\ x+3}$ అయిన x విలువ ఏమి?

సాధన $2^{x+5} = 4.3^{\ x+3}$

$= 2^{2}\ .\ 3^{\ x+3}$

2^{2} తో భాగించినపుడు

$\dfrac{2^{x+5}}{2^{2}} = 3^{\ x+3} \Rightarrow 2^{x+5-2} = 3^{x+3}$

$\Rightarrow 2^{x+3} = 3^{x+3} \qquad \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+3} = 1$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{0}$$

$$\Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

8) $a^x = b,\ b^y = c,\ c^z = a$ అయిన $xyz = 1$ అని చూపండి

సాధన : $a = c^z$

$$= \left(b^y\right)^z$$

$$= b^{yz} = \left(a^x\right)^{yz} = a^{xyz}$$

$$\Rightarrow a^1 = a^{xyz}$$

$\Rightarrow$ కావునా $xyz = 1$

9) $a^x = b^y = c^z$ మరియు $b^2 = ac$ అయిన $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$ అని చూపండి.

సాధన : $a^x = b^y = c^z = k$ అయిన

$$a = k^{\frac{1}{x}} \quad b = k^{\frac{1}{y}} \quad c = k^{\frac{1}{z}}$$

$$b^2 = ac \Rightarrow k^{\frac{2}{y}} = k^{\frac{1}{x}} . k^{\frac{1}{y}}$$

$$\Rightarrow = k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{z}}$$

ఘాతములు సమానము చేయగా

$$\frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

10) సూక్ష్మీకరించుము $\sqrt[8]{(256)^x} \quad \sqrt[6]{(729)^y}$

$256 = (16)^2 \quad (2^4)^2 = 2^8$

$729 = (27)^2 \quad (3^3)^2 = 3^6$

$$\sqrt[8]{(256)^x} = (256)^{\frac{x}{8}} = (2^8)^{\frac{x}{8}} = 2^x$$

$$\sqrt[6]{(729)^y} = (729)^{\frac{y}{6}} = (3^6)^{\frac{y}{6}} = 3^y$$

$$\Rightarrow \sqrt[8]{(256)^x} \quad \sqrt[6]{(729)^y} = 2^x \cdot 3^y$$

11) $3.9^x - 28.3^x + 9 = 0$ అయితే x విలువ కనుగొనుము

సాధన : $9^x = (3^2)^x = (3^x)^2$ కావున $3.9^x - 28.3^x + 9 = 0$

$\Rightarrow 3.(3^x)^2 - 28.(3^x) + 9 = 0$ $3^x = y$ అని ప్రతిక్షేపించగా

3. $y^2 - 28y + 9 = 0$

$3y^2 - 27y - y + 9 = 0$

$3y(y - 9) - 1(y - 9) = 0$

$(3y - 1)(y - 9) = 0 \Rightarrow 3y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$

$y - 9 = 0 \quad y = 9$

$3^x = y\ \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = 3^{-1}$

$\Rightarrow x = 1 \qquad y = 9$

$3^x = 9 = 3^2$

$\Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$

$x = 2$ లేదా - 1 అగును

12) $(625)^{0.11} \times (625)^{0.14}$ విలువ ఎంత?

సాధన : $(625)^{0.11} \times (625)^{0.14} = = (625)^{0.11 + 0.14}$

$= (625)^{0.25}$

$= (625)^{\frac{1}{4}} = (25^2)^{\frac{1}{4}}$

$= (5^{2^2})^{\frac{1}{4}} = (5^4)^{\frac{1}{4}} = 5^{4.\frac{1}{4}} = 5$

13) $x = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ అయిన $2x^3 - 6x - 5 = 0$ అని చూపండి

సాధన : $x = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ $\quad \left\{(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)\right\}$

$x^3 = (2^{\frac{1}{3}})^3 + (2^{-\frac{1}{3}})^3 + 3(2^{\frac{1}{3}})(2^{-\frac{1}{3}})(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}})$

$\Rightarrow x^3 = 2 + 2^{-1} + 3.1(x)$

$\Rightarrow x^3 = 2 + \frac{1}{2} + 3x$

$\Rightarrow x^3 = \frac{5}{2} + 3x \quad \Rightarrow \frac{2x^3}{2} = \frac{5 + 6x}{2} \quad \Rightarrow 2x^3 - 6x - 5 = 0$

14. $x^{a(a - 13)} = x^{-12}$ అయిన a విలువ కనుక్కోండి

సాధన: $x^{a(a - 13)} = x^{-12}$

$x^{a^2 - 13a)} = x^{-12}$

$\Rightarrow a^2 - 13a = -12$

$\Rightarrow a(a - 12) - 1(a - 12) = 0$

$\Rightarrow (a - 1) = 0 \quad (a - 12) = 0 \qquad \Rightarrow a = 1$ or 12

4) సారాంశము :

1) $\frac{P}{Q}$, $Q \neq 0$ P, Q లు పూర్ణాంకాలు అయితే వాటిని అకరణీయ సంఖ్యలు అంటారు.

2) m, n లు అకరణీయ సంఖ్య a, b లు వాస్తవ సంఖ్యలయిన ఘాత సిద్ధాంతాలు

(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$ (ii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (iii) $(ab)^m = a^m b^m$

(iv) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ (v) $(a^m)^n = a^{mn}$

3) ఘాత సిద్ధాంతములను వాడి మనము ఉపయోగించు విలువలు

(i) $a^0 = 1$ (ii) $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ (iii) $a^m = a^n \Rightarrow m = n$

(iv) $\sqrt[n]{a^n} = a$ (v) $\left(\sqrt[n]{a^n}\right) = a$ (vi) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}$

అభ్యాసములు

1) $3^{(2)^4}$ లను సూక్ష్మీకరించుము Ans : 3^{16}

2) $x^{2y+1} . \sqrt{x}$ ను సూక్ష్మీకరించుము Ans : $x^{\frac{4y+3}{2}}$

3) సూక్ష్మీకరించుము $\frac{4^n \left(2^{n-1}\right)^n}{8^{n+1} \; 2^n}$ Ans : 2^{n^2-2n-5}

4) సూక్ష్మీకరించుము $\frac{5^{2x+3} \; 10^{4x+1}}{25^{3x+2} \; 16^{x-\frac{1}{2}}}$ Ans : $2^3 = 8$

5) $5^{x+1} = 125^{x-1}$ అయిన x విలువ ఎంత? Ans = 2

6) $a^x = b^y = c^z$ అయిన మరియు $b^2 = ac$ అయిన $y = \frac{2xz}{x+z}$ అని చూపండి.

7) $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{a+c} = 1$ అని చూపండి

8) $(4)^{0.51} \times (4)^{0.24}$ విలువ కనుగొనండి Ans : $\sqrt[2]{2} = \sqrt{8}$

9) $x^{a(b-c)} \; x^{b(c-a)} \; x^{c(a-b)}$ విలువ ఎంత? Ans : $x^0 = 1$

10) $x^{a(a-5)} = x^{-6}$ అయిన విలువ ఎంత? Ans : a = 2, 3

11) $a^{x(x+1)} = \frac{1}{a^{-6}}$ అయిన x విలువ ఎంత? Ans : x = -3, 2

పాఠం - 13

శ్రేణులు
(Progressions)

ఈ పాఠము చదివిన తరువాత మనకు క్రింది విషయాలు అవగాహనకావాలి.

1) కొన్ని సంఖ్యల సముదాయము ఇచ్చిన వెంటనే వాటిలో ఒక క్రమమైన పద్ధతిని ఒక శ్రేణిగా గుర్తించ వచ్చును.

2) గుర్తింపబడిన శ్రేణిలో ఏదైనా ఒక సంఖ్యను నిర్దేశిత పద్ధతుల ద్వారా కనుగొన వచ్చును.

3) శ్రేణికి సంబంధించిన రెండు భావనలు ఇస్తే, మొత్తం శ్రేణిని అంతటిని వ్రాయగల్గుతాము.

ముఖ్యాంశాలు :

13.1 ఉపోద్ఘాతము

13.2 అంకశ్రేణి

13.3 గుణ శ్రేణి

13.4 హరమ శ్రేణి

13.5 సారాంశము

13.1 ఉపోద్ఘాతము :

పరిమాణాత్మక పద్ధతులు సాధారణంగా సంఖ్యా రూపంలో ఉండే దత్తాంశ విలువలపై (పరిమాణాత్మక విలువలపై) ఆధారపడతాయి. అందువలన ఒక గణాంక దత్తాంశం అనేక సమూహాములుగా ఉంటే, ఆ విలువలు ఒక క్రమ పద్ధతి ప్రకారం ఉన్నట్లు కొన్ని సందర్భాలలో గుర్తించ వచ్చును. అటువంటి సంఖ్యా సమూహాన్ని శ్రేణి అంటాము. ప్రధానంగా శ్రేణులు మూడు రకాలుగా ఉంటాయి. అవి అంకశ్రేణి A.P. , గుణ శ్రేణి G.P., హరమ శ్రేణి H.P. అంటాము. ఈ శ్రేణుల గురించి వివరంగా తెలుసుకుందాము.

13.2 అంకశ్రేణి (Airthmetic Progression) A. P.

ఒక ఇచ్చిన సంఖ్యల సమూహములో, మొదటి సంఖ్య గుర్తించబడి, దాని నుండి తరువాతగల ప్రతి రెండు వరస సంఖ్యల మధ్య సమాన భేదము ఉంటే దానిని అంకశ్రేణి అంటాము.

ఉదా : సంవత్సరానికి 15% బారువడ్డీ చొప్పున 5 సంవత్సరములకు 100 రూపాయలను ఋణముగా తీసు..., ప్రతి సంవత్సరము చివర అసలు వడ్డీలు కలిపి క్రింది విధంగా ఉంటాయి.

సంవత్సరము	1	2	3	4	5
అసలు + వడ్డీ	115	130	145	160	175

ప్రతి సంవత్సరము చివరకు 15 పరిమాణములో సంఖ్యలు పెరుగుతున్నాయి. ఇది ఒక క్రమమైన పద్ధతిగల సంఖ్యల సమూహము. దీనిని ఒక శ్రేణిగా చెప్పవచ్చును. ఇక్కడ 15 కలుపుకుంటూ ఉంటే తరువాతి సంఖ్యలు ఉత్పన్న మవుతున్నాయి. దీనిని అంక శ్రేణి అంటాము.

13.2.1 నిర్వచనము : ఒక సంఖ్యల సమూహములో మొదటి సంఖ్య గుర్తించబడి, ప్రతి తరువాత సంఖ్య, మొదటి సంఖ్యకు ఒక స్థిరరాశిని కలుపగా ఉత్పన్నమవుతూ ఉంటే ఆ సంఖ్యా సమూహాన్ని అంకశ్రేణి అంటాము. మొదటి సంఖ్యను 'ప్రధమ పదము' అని, స్థిరముగా కలుపవలసిన రాశిని 'ఉమ్మడి భేదము' అంటాము.

అంక శ్రేణిలో ప్రధమ పదమును 'a' తోను, ఉమ్మడి భేదమును 'd' తోను సూచిస్తాము. ఒక శ్రేణికి ప్రధమ పదము, ఉమ్మడి భేదము ఇస్తే మొత్తం శ్రేణి అంతటిని, అందులోని ఏ పదమునైనా, ఎన్ని పదముల సంకలనమైనా ఈ క్రింది సూత్రములు ద్వారా తెలుసుకొనగలము.

13.2.2. సూత్రము : 'a' ప్రధమ పదము, 'd' ఉమ్మడిరాశిగా గల ఒక అంకశ్రేణిలో 'n' వ పదమునకు సూత్రము

$T_n = a + (n - 1)d$

ఉదా : ఒక వ్యక్తి 15% చొప్పున సాలుసరి బారువడ్డీకి 20,000 రూపాయలను అప్పు తీసుకుంటే 9 సంవత్సరముల తరువాత వడ్డీతో సహా అతని చెల్లించవలసిన మొత్తము

$T_9 = 20,000 + (9 - 1)\ 15$

$= 20,000 + 120 = 20,120$ అవుతుంది.

13.2.3 సూత్రము : ఒక అంకశ్రేణి యొక్క మొదటి n సంఖ్యల మొత్తమునకు సూత్రము

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

ఉదా : ఒకడు 3250 రూ.ల మొత్తమును, మొదటి నెల 20 రూ.లు, చెల్లించి తరువాత ప్రతి నెల 15 రూపాయలను పెంచుకుంటూ చెల్లిస్తూ ఉంటే ఎంత కాలములో ఆ అప్పు తీరును?

జవాబు : ప్రతి నెల 15 రూ.ల చొప్పున పెరుగుతున్నదిగావున, మొదటి నెల 20, తరువాత 35, తరువాత 50...... అనే విధంగా సైకం చెల్లించబడుతుంది.

అనగా ఇక్కడ $a = 20$, $d = 15$

మొత్తం సొమ్ము = 3250 = S, n అప్పు తీరుటకు పట్టిన నెలలు అను కుంటే

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$3250 = \frac{n}{2}[2 \times 20 + (n-1)15]$$

$$\text{i.e. } 3250 = \frac{n}{2}[40 + 15n - 15]$$

$$3250 = 40 \times \frac{n}{2} + \frac{15n^2}{2} - \frac{15n}{2}$$

$$3250 = 20n + \frac{15n^2}{2} - \frac{15n}{2}$$

$$3250 = \frac{40n + 15n^2 - 15n}{2}$$

$$6500 = 25n + 15n^2$$

$$\text{i.e. } 15n^2 + 25n - 6500 = 0$$

ఇది n లో ఒక ద్విఘాత సమీకరణము. దీనిని $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ అను సూత్రము నుపయోగించి సాధించగా

$$n = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \times 15 \times (-6500)}}{2 \times 15}$$

$$= \frac{-25 \pm \sqrt{625 + 390000}}{2 \times 15}$$

$$\frac{-25 \pm \sqrt{390625}}{30} = \frac{-25 \pm \sqrt{625}}{30}$$

$= \frac{600}{30}$ లేదా $\frac{-650}{30}$ అగును.

అనగా n యొక్క విలువలు 20 లేదా - 21.66 అగును. మనకు కావలసినది ఎన్ని నెలల వాయిదాలలో అప్పు తీరును అనేది కావున n యొక్క విలువ - 21.66 అనేది మన సందర్భంలో అంగీకారం కాదు. కావున n = 20 గా తీసుకుంటాము. అనగా 20 నెలలో అప్పు పూర్తిగా తీరును.

13.3 గుణ శ్రేణి : (Geometric Progression : G.P.) :

ఒక ఇచ్చిన సంఖ్యల సమూహములో మొదటి సంఖ్య నిర్ణయింపబడి ప్రతి తరువాతి సంఖ్యకు దాని ముందు సంఖ్యకు గల నిష్పత్తి స్థిరాంకమైతే ఆ సమూహమును గుణశ్రేణి అంటాము. మొదటి సంఖ్యను 'a' తోను, స్థిర నిష్పత్తిని 'r' తోను సూచిస్తాము.

13.3.1 ఉదా : 100 రూపాయలను 12% సాలుసరి చక్రవడ్డీకి పెట్టుబడి పెడితే

మొదటి సంవత్సరము చివరకు మొత్తము $= 100 + 100 \times \frac{12}{100} = 100\left(1 + \frac{12}{100}\right)$

రెండవ సంవత్సరము చివరికి మొత్తము $= 100\left(1 + \frac{12}{100}\right) + 100\left(1 + \frac{12}{100}\right) \times \frac{12}{100}$

$$= 100\left(1 + \frac{12}{100}\right)\left(1 + \frac{12}{100}\right)$$

$$= 100\left(1 + \frac{12}{100}\right)^2$$

అదే విధంగా 3 సంవత్సరం చివరికి మొత్తం = $= 100\left(1 + \frac{12}{100}\right)^3$

పై సంఖ్యలను పరిశీలిస్తే రెండవ సంవత్సరము నుండి మొదటి సంవత్సరము నిష్పత్తి, మూడవ సంవత్సరానికి రెండవ సంవత్సరము నిష్పత్తి $\left(1+\frac{12}{100}\right)$ ఈ సంఖ్యల సమూహమును గుణ శ్రేణికి ఉదాహరణగా తీసుకొనవచ్చును.

సాధారణంగా గుణశ్రేణిలోని సంఖ్యలు a, ar, ar^2, ar^3 అను విధంగా ఉంటాయి.

13.3.2 నిర్వచనం : ఒక సంఖ్యా సమూహంలో ప్రతి తరువాతి పదము దాని ముందు పదముతో స్థిరమైన నిష్పత్తిని కలిగిఉంటే ఆ సమూహమును గుణశ్రేణి అని, ఆ నిష్పత్తిని ఉమ్మడి నిష్పత్తి అని నిర్వచిస్తాము.

13.3.3 సూత్రము: a మొదటి పదము, r ఉమ్మడి నిష్పత్తి గాగల గుణశ్రేణికి n- వ పదము $T_n = ar^{n-1}$

13.3.4 సూత్రము : a మొదటి పదము, r ఉమ్మడి నిష్పత్తిగా గల ఒక గుణ శ్రేణి యొక్క మొదటి 'n' పదముల మొత్తము

$$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r}$$

పై సూత్రములో $r = 1$ అయితే $S_n = n.a$ అని గ్రహించవలెను.

13.3.5 సూత్రము : a మొదటి పదము, r ఉమ్మడి నిష్పత్తిగా గల అనంతమైన గుణ శ్రేణిలోని పదముల మొత్తము

$$S = \frac{a}{1-r}, \quad r < 1$$

పై సూత్రములో $r = 1$ అయితే S యొక్క విలువ అనంతము.

13.3.6 ఉదా : 8000 రూపాయలకు కొన్న ఒక వస్తువు యొక్క విలువ సంవత్సరానికి 5% చొప్పున మొదటి మూడు సంవత్సరములు, సంవత్సరానికి 10% చొప్పున తరువాతి 3 సంవత్సరములు తరిగిపోతే 6 సంవత్సరముల తరువాత ఆ వస్తువు యొక్క నికర మూల్య విలువ ఎంత?

జవాబు : మొదటి సంవత్సరము తరుగుదల $= 8000 \times \frac{5}{100}$

మొదటి సంవత్సరాంతానికి వస్తువు విలువ $= 8000 - 8000 \times \frac{5}{100}$

$$= 8000\left(1-\frac{5}{100}\right)$$

రెండవ సంవత్సరంలో తరుగుదల $= 8000\left(1-\frac{5}{100}\right) \times \frac{5}{100}$

రెండవ సంవత్సరాంతానికి నికర విలువ $= 8000\left(1-\frac{5}{100}\right) - 8000\left(1-\frac{5}{100}\right) \times \frac{5}{100}$

$$= 8000\left(1-\frac{5}{100}\right)^2$$

అదే విధంగా మూడవ సంవత్సరాంతానికి వస్తువునికర మూల్య విలువ $= 8000\left(1-\frac{5}{100}\right)^3$

4వ సంవత్సరంలో తరుగుదల = 10% $= 8000\left(1-\frac{5}{100}\right)^3 \times \frac{10}{100}$

4వ సంవత్సరాంతానికి నికర విలువ $= 8000\left(1-\frac{5}{100}\right)^3 - 8000\left(1-\frac{5}{100}\right)^3 \times \frac{10}{100}$

$$= 8000\left(1-\frac{5}{100}\right)^3\left(1-\frac{10}{100}\right)$$

ఈ విధంగా చూస్తే 6వ సంవత్సరాంతానికి నికర విలువ $= 8000\left(1-\frac{5}{100}\right)^3\left(1-\frac{10}{100}\right)^3$

$$= 8000\left(\frac{95}{100}\right)^3 \times \left(\frac{90}{100}\right)^3$$

$$= 8000\,(0.95)^3 \times (0.9)^3$$

$$= 8000 \times 0.857375 \times 0.729 = 5000$$

13.3.7 ఉదా : క్రింది గుణ శ్రేణి యొక్క ఉమ్మడి నిష్పత్తి కనుగొనుము 49, 7, 1, 1/7, 1/49

జవాబు :

$$\frac{\text{రెండవ పదం}}{\text{మొదటి పదం}} = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$$

$$\frac{\text{మూడవ పదం}}{\text{రెండవ పదం}} = \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$$

$\therefore$ ఉమ్మడి నిష్పత్తి $= \frac{1}{7}$

13.3.8 : ఉదా : మొదటి పదము 1, ఉమ్మడి నిష్పత్తి 2 గా గల గుణశ్రేణి యొక్క 11వ పదమును, దాని మొదటి 11 పదముల మొత్తమును కనుగొనుము.

జవాబు : $a = 1, r = 2$

11వ పదము $T_{11} = ar^{n-1} = 1 \times 2^{11-1} = 2^{10} = 1024$

మొదటి 11 పదముల మొత్తము $S_{11} = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$

$$= \frac{1(1-2^{11})}{(1-2)} = \frac{1-2^{11}}{-1} = 2^{11} - 1$$

$$= 2048 - 1 = 2047$$

13.4 హరమ శ్రేణి (Harmonic Progression) :

13.4.1 నిర్వచనము : ఒక సంఖ్యా సమూహములో మొదటి పదము నిర్ణయించబడి దాని వ్యుత్క్రమములు అంకశ్రేణిలో ఉంటే ఆ శ్రేణిని హరమ శ్రేణి అంటాము.

13.4.2 ఉదాహరణ : $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}$ అను సంఖ్యల వ్యుత్క్రమములు 2, 5, 8, 11 అవుతాయి. ఇవి అంక శ్రేణిలో కలవు. వీటిలో మొదటి పదము 2, ఉమ్మడి భేదము 3. అందువలన హరమ శ్రేణి గురించి ఏమైనా తెలియవలెనంటే, ఇచ్చిన శ్రేణికి వ్యుత్క్రమాలు కనుగొని వాటికి అంకశ్రేణికి ఉండవలసిన లక్షణాలు ఉన్నాయన్నది పరిశీలించాలి.

13.4.3 ఉదా : ఒక వాహనముపై 400 కి.మీ. దూరమును మొదటి 150 కి.మీ. భాగము గంటకు 50 కి.మీ. ల వేగముతోను తరువాత 75 కి.మీ. భాగము గంటకు 40 కి.మీ. ల వేగముతోను, చివరి 175 కి.మీ. దూరమును గంటకు 70 కి.మీ. వేగముతోను ప్రయాణము చేస్తే, సగటు వేగము ఎంత?

జవాబు : మొదటి భాగములో 150 కి.మీ. దూరము దాటుటకు కావలసిన సమయం $= \frac{150}{50}$

రెండవ భాగములో గల 75 కి.మీ. ల దూరము ప్రయాణము చేయుటకు కావలసిన సమయం $= \frac{75}{40}$

చివరి భాగములో గల 175 కి.మీ. ల దూరమునకు కావలసిన సమయం = $= \frac{175}{70}$

మొత్తం సమయం = $= \frac{150}{50} + \frac{75}{40} + \frac{175}{70}$

మొత్తం దూరము = 400

సగటు వేగము = $\frac{\text{మొత్తము దూరము}}{\text{మొత్తం సమయం}}$

$$= \frac{400}{\frac{150}{50} + \frac{75}{40} + \frac{175}{70}}$$

$$= \frac{400}{7.375} = 54.2 \text{ K.m.}$$

గమనిక : ఈ ఉదాహరణలో 50, 40, 70 అను వేగముల వ్యుత్క్రమాలు అనగా $\frac{1}{50}, \frac{1}{40}, \frac{1}{70}$ తీసుకొని సాధించాము. హరమ శ్రేణి యొక్క అనువర్తనముగా ఈ ఉదాహరణను పేర్కొన వచ్చును.

13.5 సారాంశము : ఈ పాఠ్యాంశంలో క్లుప్తంగా శ్రేణులు, వాటి నిర్వచనాలు, అనువర్తనాలు సాధ్యమైనంత సూక్ష్మీకరించి చెప్పబడినవి. హరమ శ్రేణికి స్వతంత్ర అనువర్తనాలు ఉండవని, వ్యుత్క్రమాల ద్వారా అంకశ్రేణిలో మార్పు చేసి, అంకశ్రేణి సూత్రములన్ని ఉపయోగించవచ్చును, అని గ్రహించాలి.

7)

అభ్యాసాలు

1. మొదటి పదము 12, ఉమ్మడి భేదము 2గా గల A.P లో 15వ పదము కనుగొనుము.

(జవాబు : 40)

2. ఒక కంపెనీ మొదటి సంవత్సరంలో 1500 వస్తువులను ఉత్పత్తి చేసినది. 15 సంవత్సరాలలో ఉత్పత్తి 7100 వస్తువులకు చేరితే ప్రతి సంవత్సరము ఉత్పత్తిలో పెరుగుదల ఎంత ఉండునో అంచనా వేయుము. దాని ఆధారంగా 12వ సంవత్సరంలో ఉత్పత్తి పరిమాణమును అంచనావేయుము.

(జవాబు : 400, 5900)

3. 4, 7, 10, 13,..... 148 అను A.P. లో ఎన్ని పదములు కలవు ?

ఇచ్చిన A.P. లో మధ్య పదమును కనుగొనుము (జవాబు 49, 76)

4. 2, 6, 10 .... 86 అను A లో 13వ పదము ఎంత?

(జవాబు : 38)

పాఠం - 14

మాత్రికలు - I

ఈ యూనిట్‌లో మాత్రికల స్వరూపము వాటి సంకలనము గురించి తెలుసుకుంటాము. మాత్రికలలో రకాలు గురించి కూడా నేర్చుకుంటాము.

1) ఉపోద్ఘాతము
2) మాత్రికలు
3) మాత్రికలు - రకాలు
4) మాత్రిక యొక్క ట్రే
5) మాత్రికా వ్యత్యయము
6) అనురూప మూలకాలు
7) మాత్రికల సమానత్వము
8) మాత్రికల సంకలనము, భేదముల నియమము
9) మాత్రికా సంకలనము
10) మాత్రికా సంకలన ధర్మాలు
11) మాదిరి సమస్యలు
12) సారాంశము
13) అభ్యాసములు

మాత్రికలు - మాత్రికా సంకలనము

1. ఉపోద్ఘాతం

దీర్ఘ చతురస్ర లేక చతురస్త్రాకారములో వాస్తవ సంఖ్యలు లేక సంకీర్ణ సంఖ్యలను అమర్చిన అది మాత్రిక అగును. వివిధములైన మాత్రికలను భీజీయ గణితములోను, భేదాత్మక సమీకరణాలలోను మరియు మూడింటికంటే ఎక్కువ చలనరాశులు కలిగి యుండు వ్యాపార సమస్యలను విశ్లేషించుటలోను విరివిగా వినియోగింతురు.

మాత్రికను మొదట బ్రిటీషు శాస్త్రవేత్త జేమ్స్ జోసెఫ్ సిల్వెస్టరు రూపకల్పన చేసెను. రోవన్ హామిల్టన్, ఆర్థరు కెలాగ్, హెర్‌మాన్ గ్రాస్‌మెన్ మరియు లీపోర్ట్ కొనెక్కర్‌లు మాత్రికల సమీకరణాలను అభివృద్ధి పరచారు. డేవిడ్ హిల్‌బర్ట్ మాత్రికల వాణిజ్య విశ్లేషణ గావించెను.

2. మాత్రికలు

మాత్రిక : mn వాస్తవ సంఖ్యలను లేక సంకీర్ణ సంఖ్యలను 'm' అడ్డు వరుసలలో వరసకు 'n' సంఖ్యలుండునట్లు అమర్చి వీటిని [ ] లేక ( ) లేక || || గుర్తుల మధ్య అమర్చిన దానిని m x n తరగతికి చెందిన మాత్రిక అంటాము.

ఉదా : $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ ఇది ఒక 2 × 2 తరగతికి చెందిన మాత్రిక.

మాత్రిక సాధారణ రూపము : m అడ్డు వరుసలు, n నిలువు వరుసలు కలిగిన మాత్రిక A యొక్క సాధారణ రూపము:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}L & a_{12}L\ L & a_{1n} \\ M & M & M \\ a_{21}L & a_{22}L\ L & a_{2n} \\ M & M & M \\ a_{m1}L & a_{m2}L\ L & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \text{ అడ్డు వరుస}$$

నిలువు వరుస

దీనినే క్లుప్తంగా A $\left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ అని కూడా నిర్వచింతురు.

ఇక్కడ మొదటి మూలకము i అడ్డు వరస సంఖ్యను తెలియజేస్తుంది. i, '1' నుండి n వరకూ మారుతూ వుంటుంది.

రెండవ మూలకము 'j' నిలువ వరుస సంఖ్యను తెలియజేస్తుంది.

'j', '1' నుండి 'm' వరకూ మారుతూ వుంటుంది.

a_{23} అనగా మాత్రిక A లోని 2వ అడ్డు వరుస 3వ నిలువ వఱుస మూలకం అని అర్థం.

ఉదా : $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ఈ మాత్రికలో 2 అడ్డు వరుసలు, 4 నిలువు వరుసలు ఉన్నాయి.

ఇది 2 × 4 తరగతికి చెందిన మాత్రిక

ఈ మాత్రికలో a_{23} అనగా '1'

మాత్రికను సూచించుటకు A, B, C, D, ... లను ఉపయోగిస్తారు.

మాత్రికలోని మూలకాలను లేదా సంఖ్యలను సూచించుటకు a, b, c, d, ... లను ఉపయోగిస్తారు.

అడ్డు వరుసలను పంక్తులని, నిలువ వరుసలను దొంతులనీ అంటాము.

3. మాత్రికలు - రకాలు :

పంక్తి మాత్రిక : ఒక పంక్తిని మాత్రమే కలిగివున్న మాత్రికను పంక్తి మాత్రికని అంటారు.

పంక్తి మాత్రికలో నిలువు వరుసలు ఎన్నైనా ఉండవచ్చు.

ఉదా : $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{1 \times 4}$

దొంతి మాత్రిక : ఒక నిలువ వరుస (దొంతి) మాత్రమే కలిగియున్న మాత్రికను దొంతి మాత్రికని అంటారు.

ఉదా : $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$

శూన్య మాత్రిక : మాత్రికలోని మూలకములన్ని సున్నాలయితే దానిని శూన్య మాత్రిక అని అంటారు. దీనిని $\square$తో సూచిస్తాము.

ఉదా : $\square = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ శూన్య మాత్రికను $\square_{m \times n}$ అని సూచిస్తారు.

చతురస్ర మాత్రిక : ఒక మాత్రికలో అడ్డ వరుసల సంఖ్య. నిలువు వరుసల సంఖ్య సమానమయితే దానిని చతురస్ర మాత్రికని ంటారు.

ఉదా : $\square = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ ఇది ఒక చతురస్ర మాత్రిక

అడ్డ వరుసలు = 3 = నిలువు వరుసలు

దీర్ఘ చతురస్ర మాత్రిక : మాత్రికలో అడ్డ వరుసల సంఖ్య నిలువు వరుసల సంఖ్య సమానం కానపుడు దానిని దీర్ఘ చతురస్ర మాత్రికని అంటారు.

ఉదా : $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ ఇది ఒక దీర్ఘ చతురస్ర మాత్రిక

ప్రధాన వికర్ణము : ఒక చతురస్ర మాత్రిక $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ లో $a_{11}, a_{22} \ldots\ldots a_{nn}$ అను మూలకాలను కలిపి ప్రధాన వికర్ణము అందురు.

ప్రధాన వికర్ణమును చతురస్ర మాత్రికలో మాత్రమే అభ్యసిస్తాము.

A ప్రధాన వికర్ణము

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ $[a_{11}, \; a_{22}, a_{33}]$ ప్రధాన వికర్ణము

ఉదా : $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ ప్రధాన వికర్ణములోని మూలకాలు 1, 4, 9.

వికర్ణ మాత్రిక : ఒక చతురస్ర మాత్రికలో ప్రధాన వికర్ణములోని మూలకాలు తప్ప మిగతావన్నీ సున్నాలయితే ద్దాన్ని వికర్ణ మాత్రిక అంటారు.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

ఉదా : B $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

* వికర్ణ మాత్రికలో $a_{ij} = o \quad \forall \; i \neq j,$

సంఖ్యా మాత్రిక : ఒక చతురస్ర మాత్రికలో ప్రధాన వికర్ణములోని మూలకాలు సమానంగా వుండి, ఇతర మూలకాలన్నీ న్నాలయితే దానిని సంఖ్యా మాత్రిక అంటారు.

$A = \left[a_{ij}\right]_{n \times m}$ లో $a_{ij} = 0 \quad \forall \; i \neq j$ మరియు

$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \ldots\ldots = a_{nn},$ అయితే A సంఖ్యా మాత్రిక.

$A = \begin{bmatrix} a & o & o \\ o & a & o \\ o & o & a \end{bmatrix}$ ఒక సంఖ్యా మాత్రిక

ఉదా : $A = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$

యూనిట్ మాత్రిక, తత్సమ మాత్రిక : ఒక చతురస్ర మాత్రికలో ప్రధాన వికర్ణములోని మూలకాలన్నీ 1 (ఒకటి) అయివుండి గిలిన మూలకాలన్నీ సున్నాలయితే ఆ మాత్రికను యూనిట్ మాత్రిక లేదా తత్సమ మాత్రిక అని అంటారు. దీనిని I తో సూచిస్తారు. n తరగతికి చెందిన యూనిట్ మాత్రికను I_n అని సూచిస్తారు.

$I_n = \left[a_{ij}\right]_{n \times n} : a_{ij} = 0 \quad i \neq j$ మరియు $a_{ij} = 1 ; \; i = j$

మాత్రిక యొక్క ట్రేస్

ఒక చతురస్ర మాత్రికలోని ప్రధాన వికర్ణములోని మూలకాలను సంకలనము చేయగా వచ్చిన మొత్తాన్ని ఆ మాత్రిక యొక్క ట్రేస్ ంటారు.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ A ట్రేస్ = $a_{11} + a_{22} + a_{33}$

ఉదా : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ A యొక్క ట్రేస్ = 1+4+7 = 12

. మాత్రికా వ్యత్యయము

A అను మాత్రికలోని అడ్డు వరుసలోని మూలకాలను నిలువు వరుసలోనికి మార్చి వ్రాసినపుడు ఏర్పడే మాత్రికను A యొకు

వ్యత్యయ మాత్రికని అంటారు. దీనిని A^T తో సూచిస్తారు.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2x3} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}_{3x2}$$

6. అనురూప మూలకాలు

రెండు మాత్రికలలో ఒకే అడ్డు వరుస నిలువు వరుసలోని మూలకాలను అనురూప మూలకాలు అంటారు.

$A = \left[a_{ij}\right]_{m x n}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{m x n}$ లలో a_{23}, b_{23} అనురూప మూలకాలు

7. మాత్రికల సమానత్వము

రెండు ఒకే తరగతికి చెందిన మాత్రికలో అనురూప మూలకాలన్నీ సమానమయితే ఆ మాత్రికలను సమాన మాత్రికలు అంటారు.

$A = \left[a_{ij}\right]_{m x n}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{m x n}$ మరియు $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall\ i\ \&\ j$ అయితే $A = B$ అవుతుంది.

ఉదా : $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ అయినచో $A = B$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ అయితే $A \neq B$

ఇక్కడ ఒక మూలకం $a_{22} \neq b_{22}$

మాత్రికను ఒక అదిశతో గుణించుట

K అను వాస్తవ సంఖ్యతో A అను మాత్రికను గుణించవలెనన్న మాత్రిక A లోని అన్ని మూలకాలను K తో గుణించవలెను.

$A = \left[a_{ij}\right]_{m\,x\,n} \qquad KA = \left[Ka_{ij}\right]_{m\,x\,n}$

ఉదా : $A \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3x3}$ అయితే $2A = \begin{bmatrix} 2.3 & 2.5 & 2.4 \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ 2.7 & 2.8 & 2.9 \end{bmatrix}$

$$2A = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}_{3x3}$$

* దత్త మాత్రికను ఒక వాస్తవ సంఖ్యతో గుణించుట వలన ఆ మాత్రిక యొక్క తరగతిలో ఎటువంటి మార్పు జరుగదు.

* (-1) A = -A అవుతుంది.

మాత్రికల సంకలనము, భేదముల నియమము : రెండు ఒకే తరగతికి చెందిన మాత్రికలయినపుడు మాత్రమే వాటిని సంకలనము చేయగలము.

9. మాత్రికా సంకలనము

ఒకే తరగతికి చెందిన రెండు మాత్రికలను సంకలనము చేయవలెనన్న వాటి అనురూప మూలకాలను సంకలనము చేయవలెను.

A, B ల సంకలన మాత్రికను A + B తో సూచిస్తారు.

$A = \left[a_{in}\right]_{m \times n}$ $B = \left[b_{ij}\right]_{m \times n}$ అయిన $A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m \times n}$

ఉదా : $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}_{2x2}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{2x2}$ A, B ఒకే తరగతికి చెందినవి.

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+2 & 7+3 \\ 8+4 & 9+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 12 & 14 \end{bmatrix}$$

మాత్రికా భేదము : రెండు మాత్రికల భేదము అనగా వాటి అనురూప మూలకాల యొక్క భేదములతో ఏర్పడు మాత్రిక.

A, B ల భేదమును A-B తో సూచిస్తారు.

$A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ $B = \left[b_{ij}\right]_{m \times n}$ అయితే

$$A - B = \left[a_{ij} - b_{ij}\right]_{m \times n}$$

ఉదా : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{2x3}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2x3}$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & 0-7 & 7-5 \\ 4-1 & 2-0 & 3-4 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} -1 & -7 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{2x3}$$

). మాత్రిక సంకలన ధర్మాలు :

సిద్ధాంతము 1 : మాత్రికా సంకలనము వినిమయ న్యాయాన్ని పాటిస్తుంది. A,B లు రెండు ఒకే తరగతికి చెందిన మాత్రికలయితే A + B = B + A అవుతుంది.

ఉదా : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 0+7 & 7+5 \\ 4+1 & 2+0 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 12 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B + A = \begin{bmatrix} 2+1 & 7+0 & 5+7 \\ 1+4 & 0+2 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 12 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = B + A$$

సిద్ధాంతము 2 : మాత్రికా సంకలనము సహచర్య న్యాయాన్ని పాటిస్తుంది.

A, B, C లు ఒకే తరగతికి చెందిన మాత్రికలయితే A + (B + C) = (A + B) + C.

ఉదా : $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

$B+C = \begin{bmatrix} 2+2 & 7+0 \\ 3+5 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ $A+(B+C) = \begin{bmatrix} 1+4 & 4+7 \\ 0+8 & 2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

$A+B = \begin{bmatrix} 1+2 & 4+7 \\ 0+3 & 2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ $(A+B)+C = \begin{bmatrix} 3+2 & 11+0 \\ 3+5 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A+(B+C) = (A+B)+C$$

సిద్ధాంతము 3 : ఏదయినా మాత్రికను శూన్య మాత్రికతో సంకలనమొనర్చగా మాత్రిక విలువ మారదు. A ఒక మాత్రికలు, $\square$ శూన్య మాత్రికయిన $A + \square = \square + A$

సిద్ధాంతము 4 : ఏదయినా మాత్రిక A కు -A ఋణమాత్రిక మరియు $A + (-A) = \square = -A + A$ ($\square$= శూన్య మాత్రిక)

$A = [a_{ij}]_{mxn}$ $-A = (-1)A = [(-1)a_{ij}]_{mxn} = [-a_{ij}]_{mxn}$

$A+(-A) = X = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow \square$

ఉదా : $A = \begin{bmatrix} -7 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ $-A = \begin{bmatrix} 7 & -8 & -2 \\ -2 & -3 & 4 \\ -5 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

$$A+(-A) = \begin{bmatrix} -7+7 & 8+(-8) & 2+(-2) \\ 2+(-2) & 3+(-3) & -4+4 \\ 5+(-5) & 6+(-6) & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \square$$

- A ను A యొక్క సంకలన విలోమము అంటారు.

సిద్ధాంతము 5 : A, B లు ఒకే తరగతికి చెందిన మాత్రికలయి K ఒక అదిశ అయినపుడు $K(A+B) = KA + Kb$

$A = [a_{ij}]_{mxn}$ $B = [b_{ij}]_{mxn}$

$K(A+B) = K(a_{ij}+b_{ij})_{mxn} = (ka_{ij}+kb_{ij})_{mxn} = KA + KB$

సిద్ధాంతము 6 : K_1, K_2 లు వాస్తవ సంఖ్యలు, A ఒక మాత్రికయిన

$(K_1 + K_2)A = K_1A + K_2A$

ఉదా : $K_1 = 2$ $K_2 = 4$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

$$2A + 4A = K_1A + K_2A = (K_1 + K_2)A = (2+4)A = 6A$$

$$2A + 4A = \begin{bmatrix} 2 & 14 \\ 4 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 28 \\ 8 & 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 42 \\ 12 & 54 \end{bmatrix}$$

$$6A = \begin{bmatrix} 6.1 & 6.7 \\ 6.2 & 6.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 42 \\ 12 & 54 \end{bmatrix}$$

11. మాదిరి సమస్యలు :

1) ఒక పాఠశాలలో 12 మంది బాలికలు, 26 మంది బాలురు, 9వ క్లాసులోనూ, 15 మంది బాలికలు 32 మంది బాలురు 10వ క్లాసులోను కలరు. ఈ దత్తాంశాన్ని మాత్రిక రూపంలో వ్రాయండి.

సాధన :

	బాలికలు	బాలురు
9వ క్లాసు	12	26
10వ క్లాసు	15	32

క్లాసులను అడ్డ వరుసలుగానూ, బాలికలు, బాలురును నిలువు వఋసలుగానూ వ్రాసిన ఈ దత్తాంశము మాత్రికా రూపం దాల్చును.

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 26 \\ 15 & 32 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}_{2\times3}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times3}$ అయిన $A + B$, $A - B$, $4A + 2B$, $2A - 3B$ లను కొనుగొనము.

సాధన : $$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 4+0 & 7+2 \\ 3+0 & 5+2 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-1 & 4-0 & 7-2 \\ 3-0 & 5-2 & 8-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$4A + 2B = \begin{pmatrix} 4.2 & 4.4 & 4.7 \\ 4.3 & 4.5 & 4.8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.1 & 2.0 & 2.2 \\ 2.0 & 2.2 & 2.1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 16 & 28 \\ 12 & 20 & 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8+2 & 16+0 & 28+4 \\ 12+0 & 20+4 & 32+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 16 & 32 \\ 12 & 24 & 34 \end{pmatrix}$$

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 2.2 & 2.4 & 2.7 \\ 2.3 & 2.5 & 2.8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3.1 & 3.0 & 3.2 \\ 3.0 & 3.2 & 3.1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 8 & 14 \\ 6 & 10 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & 8-0 & 14-6 \\ 6-0 & 10-6 & 16-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 8 \\ 6 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

3) $K_1 = 7, K_2 = 4, \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ అయితే $7A + 4A$ ను కనుగొనుము

సాధన : సిద్ధాంతము (6) ప్రకారము $7A + 4A = 11A$

$$7A + 4A = 11\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 & 88 & 99 \\ 55 & 66 & 44 \end{pmatrix}$$

4) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & -7 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ అయినచో $4A + 7B$ ని కనుక్కోండి

సాధన : $4A = \begin{pmatrix} 4.6 & 4.2 & 4.7 \\ 4.3 & 4.4 & 4.0 \\ 4.2 & 4.(-7) & 4.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 8 & 28 \\ 12 & 16 & 0 \\ 8 & -28 & 4 \end{pmatrix}$

$$7B = \begin{pmatrix} 7.2 & 7.1 & 7.3 \\ 7.(-1) & 7.4 & 7.2 \\ 7.0 & 7.2 & 7.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 21 \\ -7 & 28 & 14 \\ 0 & 14 & 63 \end{pmatrix}$$

$$4A + 7B = \begin{pmatrix} 24 & 8 & 28 \\ 12 & 16 & 0 \\ 8 & -28 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 & 7 & 21 \\ -7 & 28 & 14 \\ 0 & 14 & 63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 15 & 49 \\ 5 & 44 & 14 \\ 8 & -14 & 67 \end{pmatrix}$$

5) $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ అయితే A సంకలన విలోమాన్ని వ్రాయండి.

సాధన : A యొక్క సంకలన విలోమం -A

$$-A = \begin{bmatrix} -7 & -2 & -3 \\ -8 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

6) $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ అయితే

$A + B - X = \square$ అయ్యేటట్లు X విలువ వ్రాయండి.

సాధన :

$$A + B - X = \quad \Rightarrow \quad X = A + B$$

$$X = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 13 \end{bmatrix}$$

7) $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, B అనే మాత్రికను $A - B = I_2$ అయ్యేటట్లుగా B ని కనుగొనుము.

సాధన : $A - B = I_2 \Rightarrow B = A - I_2$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

8) $A = \begin{bmatrix} X-3 & 2y-8 \\ z+2 & 6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & a-4 \end{bmatrix}$ మరియు $A = B$ అయితే x, y, z విలువలు వ్రాయండి

సాధన : అనురూప మూలకాలను సమానం చేయగా

$x-3 = 5$ $2y-8 = 2$ $z + 2 = -2$ $6 = a - 4$

$x = 8$ $2y = 2 + 8 = 10$ $z = -2-2$ $a = 6 + 4$

$\Rightarrow y = 5$ $z = -4$ $= 10$

$\Rightarrow x = 8;\ y = 5;\ z = 4$

9) సారాంశము :

* mn వాస్తవ సంఖ్యలను m అడ్డువరుసలులో ఒక అడ్డ వరుసకు n సంఖ్యలను రాసి "[ ]", "( )" "ll ll" మధ్య వ్రాసిన దానిని మాత్రిక అందురు.
* రెండు ఒకే తరగతికి చెందిన మాత్రికలను సంకలనము లేదా భేదము చేయవచ్చును.
* మాత్రికా సంకలనము వినిమయన్యాయాన్ని, సహచర్య న్యాయాన్ని పాటిస్తాయి.
* A,B లో ఒక తరగతికి చెందిన మాత్రికలయినపుడు, K వాస్తవ సంఖ్య అయిన $K(A + B) = KA + KB$
* K_1, K_2 వాస్తవ సంఖ్యలయి A ఒక మాత్రికయిన

  $K_1A + K_2A = (K_1 + K_2)A$
* A అనుమాత్రికకు -A సంకలన విలోమము.

  $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ అనే చతురస్ర మాత్రికలో $a_{11}, a_{22}, \ldots\ldots a_{nn}$ మూలకాల రేఖను ప్రధాన వికర్ణము అంటారు.

అభ్యాసములు

1) ఒక కుటుంబములో అనిత, హరిత, కవిత అనే ముగ్గరు బాలికలు కలరు అనితకు 99 లెక్కలులో, 96 మార్కులు సైన్స్‌లో, 93 సాంఘీకములో వచ్చినవి. హరితకు 90 లెక్కలులో, 94 సైన్స్‌లో, 88 సాంఘీకములో వచ్చినవి. కవితకు 100 లెక్కలులో, 94 సైన్స్‌లో, 90 సాంఘీకములో వచ్చినవి. ఈ దత్తాంశములను మాత్రికా రూపములో వ్రాయుము.

ఈ మాత్రికా లక్షణము లేమి?

జవాబు : లెక్కలు సైన్స్ సాంఘీకము

$$\begin{array}{l} \text{అనిత} \\ \text{హరిత} \\ \text{కవిత} \end{array} \begin{bmatrix} 99 & 96 & 93 \\ 90 & 94 & 88 \\ 100 & 94 & 90 \end{bmatrix}$$

2) సంకలన విలోమమనగానేమి?

$A = \begin{bmatrix} -7 & 2 & -4 \\ 0 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ అయిన A యొక్క సంకలన విలోమము వ్రాయండి. Ans : $-A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 0 & 8 & -5 \\ -1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

3) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ అయితే A^T కనుక్కోండి (వ్యత్యయము) Ans : $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 7 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

4) $A = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ అయిన $A + B - X = \square$ అయ్యేటట్లు X వ్రాయండి

Ans :- $X = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$

5) $A = \begin{bmatrix} 1-a & 2 & 7 \\ -3 & 1+a & 4 \\ 0 & 5 & 2a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & -2 & -7 \\ 3 & -a & 4 \\ 0 & -5 & 1-2a \end{bmatrix}$ అయిన $A + B = I_3$ అవుతుందని చూపండి

6) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 8 & 9 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ మరియు $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 9 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ అయిన $A + (B + C) = (A + B) + C$ అవుతుందని చూపండి

7) $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $A-B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ అయిన A,B విలువలు వ్రాయండి

Ans : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

8) $A = \begin{bmatrix} x-1 & 2y-8 \\ z+2 & 8 \end{bmatrix}$. $B = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ -2 & a-6 \end{bmatrix}$ మరియు $A = B$ అయితే x, y, z మరియు a ల విలువలు వ్రాయండి. Ans: x = 11, y = 5, z = -4, a = 14

) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$ అయితే A + B, 2A + 3B, 5A - 2B లను వ్రాయండి.

Ans: $\begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 14 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 25 & -15 \\ 37 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -4 & -9 \\ 7 & 22 \end{bmatrix}$

0) ఒక కంపెనీ A,B,C అనే వస్తువులను ఉత్పత్తి చేస్తుంది. 2001, 2002 సం॥లకు టర్నోవర్‌లు పట్టికలో తెలిపిన విధంగా ఉన్నాయి రెండు సంవత్సరాలకు కలిపి టర్నోవర్ తెలపండి. మాత్రికా సంకలనము ద్వారా తెలపండి.

2001 సం॥లో టర్నోవరు వేల టన్నులలో

	A	B	C
బొంబాయి	21	16	27
ఢిల్లీ	36	18	31

2002 సం॥లో టర్నోవరు వేల టన్నులలో

	A	B	C
బొంబాయి	10	19	24
ఢిల్లీ	18	26	30

Ans: మొత్తం టర్నోవరు మాత్రిక పద్ధతిలో

	A	B	C	
బొంబాయి	31	35	51	
ఢిల్లీ	54	44	61	
	89	79	111	= 275 వేల టన్నులు

- Ms. Achala

పాఠం - 15

మాత్రికలు - II

ఈ పాఠ్యాంశములో రెండు మాత్రికల గుణకార నియమములు గుణకారము పద్ధతి, నిర్ధారకములు కనుగొనుట తెలుసుకుంటాము.

1. ఉపోద్ఘాతము
2. మాత్రికా గుణకార నియమము
3. మాత్రికా గుణకారము
4. మాత్రికా గుణకార లక్షణములు
5. మాత్రికా వ్యత్యయ ధర్మములు
6. లఘు నిర్ధారకములు
   a) మాత్రికా నిర్ధారక నియమము
   b) 2 x 2 మాత్రికా నిర్ధారకములు
   c) లఘు నిర్ధారకము
   d) సహగుణావయవము
   e) మాత్రికా నిర్ధారకము
7. నిర్ధారక లక్షణములు
8. మాదిరి సమస్యలు
9. సారాంశము
10. అభ్యాసములు

మాత్రికల గుణకారము, నిర్ధారకములు –

1. ఉపోద్ఘాతము :

మాత్రికలను గుణకారము చేయవలెనన్న మొదటి మాత్రికలోని నిలువు వరుసల సంఖ్య రెండవమాత్రికలోని అడ్డువరుసల సంఖ్యకు సమానంగా ఉండవలెను. నిర్ధారకములు చతురస్ర మాత్రికలకు మాత్రమే నిర్వచింతుము. నిర్ధారకములు నుపయోగించి సమీకరణములోని చలరాశుల విలువలు కనుగొనెదము.

2. మాత్రికా గుణకారనియమము :

A, B అను మాత్రికలను గుణకారమొనర్చవలెనన్న A మాత్రికలోని నిలువువరుసల సంఖ్య B లోని అడ్డువరుసల సంఖ్యకు సమానముగా ఉండవలెను.

ఉదా : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{2\times3}$. $\quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 5 \\ 6 & 9 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3}$

A లో 3 నిలువు వరుసలు కలవు, B లో 3 అడ్డ వరుసలు కలవు. ఇపుడు AB సాధ్యమవుతుంది.

B లో 3 నిలువు వరుసలు కలవు, A లో 2 అడ్డువరుసలు కలవు. కావునా BA సాధ్యపడదు.

3. మాత్రికా గుణకారము :

A, B లు మాత్రికా గుణకారనియమం పాటించు రెండు మాత్రికలయినపుడు, A లో i అడ్డువరుస మూలకాలను, B లో j నిలువు వరుస మూలకాలను గుణించి వానిని సంకలనము చేయగా వచ్చు సంఖ్య AB మాత్రికలో ij స్థానంలో ఉంటుంది.

$A=[aij]_{m\times n}$ $B=[bjk]_{n\times p}$ అయిన AB m x p మాత్రిక అవుతుంది.

$AB=[cik]_{m\times p}$ దీనిలో $cik=a_{i1}b_{ik}+a_{i2}b_{2k}+.......+a_{in}b_{nk}$ క్లుప్తముగా దీనినే $AB=\left[\sum_{j=1}^{n} aij\ bij\right]_{m\times p}$ అని కూడా వ్రాయవచ్చును.

ఉదా : (1) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}_{1\times 3}$ $B=\begin{bmatrix}7\\0\\6\end{bmatrix}_{3\times 1}$ అయిన $AB=[1.7+2.0+3.6]=[7+2+18]=[27]_{1\times 1}$ మాత్రిక.

2. $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 3\end{bmatrix}_{2\times 2}$ $B=\begin{bmatrix}7 & 6 & 0\\8 & 5 & 0\end{bmatrix}_{2\times 3}$

A లో నిలువు వరుసలు '2'. B లో అడ్డువరుసలు 2. కావునా AB సాధ్యపడుతుంది. A లో మొదటి అడ్డువరుసలోని మూలకాలు 1, 0 లను, B లోని మొదటి నిలువు వరుసలోని మూలకాలు $\begin{matrix}7\\8\end{matrix}$ తో గుణించి సంకలనము చేయగా 1.7 + 0.8 = 7 ఇది AB మాత్రికలో మొదటి వరుస మొదటి మూలకము. A లో మొదటి అడ్డువరుసలోని మూలకాలు 1,0 లను B లోని రెండవ నిలువు వరుసలోని మూలకాలు 6 5 లతో గుణించి సంకలనము చేయగా 1.6 + 0.5 = 6 ఇది AB లో మొదటి వరుస రెండవ మూలకము. ఈవిధంగా AB లో అన్ని మూలకాలను కనుగొనవచ్చును.

$$\therefore AB=\begin{bmatrix}1.7 & 0.8 & 1.6+0.5 & 1.0+0.0\\2.7+3.8 & 2.6+3.5 & 2.0+3.0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 6 & 0\\38 & 27 & 0\end{bmatrix}$$

అనగా $AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 6 & 0\\38 & 5 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 6 & 0\\38 & 27 & 0\end{bmatrix}$

4. మాత్రికా గుణకార లక్షణములు :

సిద్ధాంతము 1 : $A=[aij]_{m\times n}$ మరియు I_m, I_n లు యూనిట్ మాత్రికలయినపుడు $A\,I_n=A$ మరియు $I_m\,A=A$

ఉదా: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 0 & 6\end{bmatrix}_{2\times 3}$ $I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ అయితే

$$AI_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+2.0+3.0 & 1.0+2.1+3.0 & 1.0+2.0+3.1 \\ 3.1+0.0+6.0 & 3.0+0.1+6.0 & 3.0+0.0+6.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$I_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+3.0 & 1.2+0.0 & 1.3+0.6 \\ 0.1+1.3 & 0.2+1.0 & 0.3+1.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} = A$$

సిద్ధాంతము 2 : మాత్రికా గుణకారము వినిమయ ధర్మాన్ని అన్నివేళలా పాటించదు. A, B గుణకార నియమాన్ని పాటించు మాత్రికలయిన $AB \neq BA$

ఉదా :

(1) A,B ల గుణకారములో AB సాధ్యపడి, BA సాధ్యపడకపోవచ్చును.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ అయిన AB = $\begin{bmatrix} 1.1+0.0+2.0, & 1.0+0.1+2.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$ BA సాధ్యపడదు.

(2) BA సాధ్యపడినా, AB సాధ్యపడకపోవచ్చును.

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ అయితే AB సాధ్యపడదు.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+8.2+3.4 \\ 7.1+2.2+4.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 27 \end{bmatrix}$$

(3) గుణకార నియమమునననుసరించి AB, BA కనుగొనిననా $AB \neq BA$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times2}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}_{2\times2}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1.2+7.6 & 1.4+7.8 \\ 2.2+3.6 & 2.4+3.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 & 60 \\ 22 & 32 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2.1+4.2 & 2.7+4.3 \\ 6.1+8.2 & 6.7+8.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 26 \\ 22 & 66 \end{bmatrix}$$

AB, BA కనుగొనిననూ $AB \neq BA$

ధర్మము : గుణకారనియమముతో మాత్రికలు సహచర్యన్యాయాన్ని పాటిస్తాయి. A,B,C లు m x n, n x p, p x q తరగతి మాత్రికలయినపుడు A(BC) = (AB) C

8

ఉదా : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ అయితే

$$A.B = \begin{bmatrix} 1.0+0.1 & 1.2+0.5 \\ 3.0+4.1 & 3.2+4.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 26 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2+ & 2.1 \\ 4.2+26.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 34 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 0.2+2.1 \\ 1.2+5.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+0.7 \\ 3.2+4.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 34 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = A(BC)$$

సిద్ధాంతము 4 : మాత్రికల సంకలనముపై మాత్రికా గుణకారము విభాగ న్యాయాలను పాటిస్తుంది.

(i) కుడి విభాగ న్యాయము :- $(A + B)\,C = AC + BC$

(ii) ఎడమ విభాగన్యాయము :- $A\,(B + C) = AB + AC$

ఉదా :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+2.1 \\ 4.2+9.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad AC+BC = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ (A+B)C = AC+BC$$

ఇదే విధంగా $A\,(B + C) = AB + AC$ అని కూడా గమనించవచ్చును.

(i) A ఒక చతురస్ర మాత్రికయినపుడు $A^2 = A.A$

$$A^3 = A.A.A$$

రెండు శూన్యేతర మాత్రికల లబ్ధము శూన్యమాత్రిక అవ్వవచ్చును.

ఉదా : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ A, B లు శూన్య మాత్రికలు కావు.

కానీ $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ శూన్యమాత్రికగును.

5. మాత్రికా వ్యత్యయము ధర్మములు :

మాత్రికా వ్యత్యయము : A మాత్రికలోని అడ్డువరుసలోని మూలకాలను మార్చి నిలువు వరుసలుగా వ్రాసినపుడు ఏర్పడు మాత్రికను A యొక్క వ్యత్యయ మాత్రిక అంటారు. దీనిని A^T తో సూచిస్తారు.

ధర్మములు :

1 : వ్యత్యయ మాత్రికను వ్యత్యయము చేయగా అసలు మాత్రికవచ్చును. $\left(A^T\right)^T = A$

2 : A,B లు ఒకే తరగతికి చెందిన మాత్రికలయినపుడు $(A+B)^T = A^T + B^T$ అవుతుంది.

3 : A,B లు గుణకార నియమముగల రెండు మాత్రికలయినపుడు $(AB)^T = B^T A^T$ అవుతుంది.

K ఒక అదిశ అయివుండి A ఒక మాత్రికయినచో

$(KA)^T = KA^T$

$A_1, A_2 \ldots\ldots\ldots A_n$ గుణకార నియమం పాటించు మాత్రికలయినపుడు

$[A_1 A_2 \ldots\ldots\ldots A_n]^T = A_n^T A_{n-1}^T \ldots\ldots\ldots\ldots A_2^T A_1^T$

ఉదా 1 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} [A^T]^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ అయితే

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+3 & 3+4 \\ 4+1 & 5+8 & 6+6 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 13 & 12 \end{bmatrix} \qquad (A+B)^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 13 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

ఉదా 3 : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1.2+1-0 & 1.4+(-1).1 \\ 2.2+0.0 & 2.4+0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+0(-1) & 2.2.+0.0 \\ 4.1+1(-1) & 4.2+1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

5. లఘు నిర్ధారకము

a) మాత్రికా నిర్ధారకము :

నిర్ధారకము నియమము : మాత్రిక చతురస్ర మాత్రికయినపుడు మాత్రమే దానికి నిర్ధారకము కనుగొనగలము.

b) 2 x 2 మాత్రిక నిర్ధారకము : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times2}$ అను మాత్రికకకు ad-bc కనుగొనగా వచ్చు సంఖ్య నిర్ధారకము అవుతుంది.

దీనిని |A|, ΔA, det A అని సూచిస్తాము.

$$|A| = det\ A = \Delta A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ఉదా : $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} |\mathrm{B}| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2\times7 - 3\times5 = 14 - 15 = -1$

C యొక్క నిర్ధారకము శూన్యం.

లఘు నిర్ధారకము :

A అను చతురస్ర మాత్రికలో i అడ్డువరుస j నిలువు వరుస లను తొలగించగా వచ్చు మా [illegible] యొక్క నిర్ధారకమును A లోని

aij మూలకము యొక్క లఘునిర్ధారకము అని అంటారు.

దీనిని Mij అని సూచింతురు.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ అయితే a_{11} యొక్క లఘు నిర్ధారకము $= M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

M_{11} అనగా 1 అడ్డువరుస, 1 నిలువ వరుస తీసివేయగా మిగిలిన మాత్రిక యొక్క నిర్ధారకము.

ఇది a_{11} యొక్క లఘు నిర్ధారకము.

a_{32} యొక్క లఘు నిర్ధారకము $= M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}$

ఉదా: $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ -8 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ మూలకము 2 యొక్క లఘునిర్ధారకము.

$2 = b_{12}$ లఘునిర్ధారకము $= \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} = 63 + 40 = 103$

d) సహగుణావయవము :

$A = [aij]_{n\times n}$ మాత్రికలో aij అనే మూలకపు లఘు నిర్ధారకము Mij అయిన, $(-1)^{i+j} Mij$ అనే మూలకాన్ని aij యొక్క సహగుణావయవము అని అంటారు.

దీనిని Aij అని సూచిస్తారు. $Aij = (-1)^{i+j} Mij$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})$$

ఉదా : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ -8 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ 2 యొక్క లఘునిర్ధారకము $M_{12} = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} = 103$

2 యొక్క సహగుణావయవము $= (-1)^{1+2} M_{12}$

$$= (-1)^3 103 = -103$$

మాత్రికలోని ప్రతిమూలకమునకు సహగుణావయవము కనుగొనవచ్చును.

e) మాత్రికా నిర్ధారకము :

చతురస్ర మాత్రిక నిర్ధారకముగా ఒక అడ్డువరసలోని మూలకాలను వాటి అనురూప సహగుణావయాలను గుణించి సంకలనము చేయుగా వచ్చు సంఖ్య.

అడ్డువరుసలకు బదులుగా నిలువు వరుసలు కూడా ఉపయోగించవచ్చు.

$$A = [aij]_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots\ldots a_{nn} \end{bmatrix} \text{అయినచో}$$

$$\det A = |A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots a_{2n} \\ a_{nL} & a_{n2}\ldots\ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$

$= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \cdots\cdots\cdots + a_{1n} A_{1n}$ (అడ్డువరుసలనుపయోగించినది)

$= a_{1n} A_{1n} + a_{2n} A_{2n} + \cdots\cdots\cdots + a_{nn} A_{nn}$ (నిలువు వరుసలనుపయోగించి)

ఉదా : (i) $A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix}$

$$|A| = a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} f & g \\ j & k \end{vmatrix} + b(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} e & g \\ c & k \end{vmatrix} + c(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} e & f \\ i & j \end{vmatrix}$$

$$|A| = a(fk - gj) - b(ek - gi) + c(ej - fi)$$
$$= afk - agi - bek + bgi + cej - cfi$$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (i) అయినచో

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4+3) + 1(8+3) + 4(4-2)$$
$$= 14 + 11 + 8 = 33.$$

7) నిర్ధారక లక్షణములు :

సిద్ధాంతములు 1 : చతురస్ర మాత్రికలో ఒక అడ్డు వరుసలోని (నిలువు వరుస) మూలకాలను వేరొక అడ్డువరుస (నిలువు వరుస) లోని మూలకాల యొక్క సహగుణావయవాలతో గుణించి, సంకలనము చేసినచో ఆవిలువ శూన్యమవుతుంది.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$

a_{11} , $a_{12} \ldots\ldots a_{1n}$ మొదటి అడ్డువరుసలోని మూలకాల

A_{21} , $A_{22} \ldots\ldots A_{2n}$ రెండవ అడ్డువరుసకు సంబంధించిన సహగుణావయవాలు అయినచో

$$a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + \cdots\cdots\cdots + a_{1n} A_{2n} = 0$$

సిద్ధాంతము 2 : చతురస్ర మాత్రిక A కు $|A| = |A^T|$

ఉదా : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\quad A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

$|A| = ad - bc$ $\quad |A^T| = ad - bc$

$|A| = |A^T|$

సిద్ధాంతము 3 : ఏదయినా చతురస్ర మాత్రికలో రెండు అడ్డువరుసలు లేదా నిలువు వరుసలు పరస్పరం మార్చినచో నిర్ధారకం విలువ యొక్క గుర్తు మారుతుంది.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

B : 1 అడ్డువరుస 3వ అడ్డువరుస మార్చగా వచ్చినది. $R_1 \leftrightarrow R_3$

$$B - \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$ అయినచో $|B| = -|A|$

సిద్ధాంతము 4 : ఏదయినా చతురస్ర మాత్రికలో రెండు అడ్డువరుసలు (నిలువు వరుసలు) సమానమైతే ఆ మాత్రిక యొక్క నిర్ధారకం విలువ సున్నా అవుతుంది.

ఉదా : $A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & & c_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} a & b & a \\ c & d & c \\ f & g & f \end{bmatrix} \end{array}$ $\quad c_1 = c_3$ కావున $|A| = 0$

సిద్ధాంతము 5: ఏదయినా చతురస్ర మాత్రికలో ఒక అడ్డువరుస (నిలువ వరుస) లోని మూలకాలు మరొక అడ్డువరుసలోని మూలకాలతో అనుపాతంలో ఉంటే ఆ మాత్రిక నిర్ధారకం విలువ సున్నా అవుతుంది.

ఉదా : $A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & & c_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{21} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{31} \end{bmatrix} \end{array}$ $c_3 = kc_1$ c_1, c_3 లు అనులోమానుపాతంలో ఉన్నాయి. కావున $|A| = 0$

సిద్ధాంతము 6 : ఒక మాత్రికలోని ఏదయినా అడ్డువరుసలోని (నిలువ వరుస) మూలకాలను K అనే సంఖ్యతో గుణించగా ఏర్పడే మాత్రిక నిర్ధారకము విలువ ఇచ్చిన మాత్రిక నిర్ధారక విలువకు K రెట్లుంటుంది.

ఉదా: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ R_2 , K తో గుణించగా వచ్చిన మాత్రిక B అయినచో

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad |B| = K|A|$$

సిద్ధాంతము 7 : ఒక చతురస్ర మాత్రికలో ఒక అడ్డువరుస (నిలువు వరుస) లోని ప్రతిమూలకాన్ని ఒక సంఖ్యతో (λ) గుణించి వేరొక అడ్డువరుస (నిలువ వరుస) లోని అనురూప మూలకాలను సంకలనము చేసిన వచ్చు మాత్రికకు నిర్ధారక విలువ మారదు.

ఉదా : $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ i & j & k \end{bmatrix}$ 2 వ అడ్డువరుసను λ తో గుణించి 1వ అడ్డు వరుసకు సంకలనము చేయగా వచ్చిన మాత్రికను

B అనుకొందాము. $B = \begin{bmatrix} a+\lambda f & b+\lambda g & c+\lambda h \\ f & g & h \\ i & j & k \end{bmatrix}$ అయితే $|A| = |B|$

మాత్రికలో అడ్డువరుసలోని (నిలువు వరుసలోని) మూలకాలు సున్నాలయితే ఆ మాత్రికల నిర్ధారక విలువ సున్నా అవుతుంది.

8. మాదిరి ప్రశ్నలు

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ అయితే (A + B) (A - B) వ్రాయండి

సాధన : $A + B = \begin{bmatrix} 2+4 & 3+0 \\ 7+0 & 8+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-4 & 3-0 \\ 7-0 & 8-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 39 \\ 49 & 84 \end{bmatrix}$$

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ అయితే $A^2 - 2A - 3I = 0$ అని చూపండి.

సాధన : $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 & 2+2 \\ 2+2 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad 3I = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 2A - 3I = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-2-3 & 4-4-0 \\ 4-4-0 & 5-2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0 = \text{ZeroMatrix}$$

3. రాము ఒక కంపెనీలో A, B,C అనే ఉత్పత్తులను ఒక్క యూనిట్‌కి 125, Rs, 250 Rs, 200, Rs,అని నిర్ణయించి, A 20 యూనిట్లు, B 15 యూనిట్లు మరియు 18 యూనిట్లు కొనెను. ఈ దత్తాంశమును మాత్రికా రూపంలో వ్రాసి మొత్తం ఎంతడబ్బు చెల్లించెనో కనుగొనుము.

సాధన : ఉత్పత్తి యూనిట్లు ఒక పంక్తి మాత్రికగా రాసిన

$$P = \begin{bmatrix} 20 & 15 & 18 \end{bmatrix}_{1\times3}$$

ఉత్పత్తి ధరను దొంతి మాత్రికగా రాయగా

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$PQ = [20 \times 125 + 15 \times 250 + 18 \times 200]$$

$$= [2500 + 3700 + 3600] = [9850]_{1\times1}$$

అనగా రాము చెల్లించిన డబ్బు = Rs. 9850

4. ఒక దుస్తుల షాపులో నిర్ణయించిన ధరలు క్రింది విధంగా ఉన్నాయి.

ప్యాంటు ఖరీదు 225.00 Rs

షర్టు ఖరీదు 150.00 Rs

బనియన్ ఖరీదు 50.00 Rs

A అను వ్యక్తి 3 ప్యాంట్లు, 4 షర్టులు, 2 బనియన్లు కొనెను.

B అను వ్యక్తి 2 ప్యాంట్లు, 2 షర్టులు, 1 బనియన్లు కొనెను.

C అను వ్యక్తి 4 ప్యాంట్లు, 3 షర్టులు, 2 బనియన్లు కొనెను.

ఈ దత్తాంశమును మాత్రికల రూపంలో రాసి, ఎవరెవరు ఎంతెంత ఇవ్వవలెనో గుణకార పద్ధతిలో నిర్ణయించండి.

సాధన : P అనగా ప్యాంట్లు అని, S అనగా షర్టులు, B అనగా బనియన్లు అని వ్రాయగా దత్తాంశమును పట్టిక రూపంలో వ్రాయగా

	P	S	B
A	3	4	2
B	2	2	1
C	4	3	2

మాత్రిక రూపంలో $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

ధరలను మాత్రికగా వ్రాయగా $\begin{array}{c} P \\ S \\ B \end{array} \begin{bmatrix} 225 \\ 150 \\ 50 \end{bmatrix}$

ఈ రెండు మాత్రికలు గుణకారము చేయగా

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 225 \\ 150 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times225 + 4\times150 + 2\times50 \\ 2\times225 + 2\times150 + 1\times50 \\ 4\times225 + 3\times150 + 2\times50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1375 \\ 850 \\ 1450 \end{bmatrix}$$

అనగా

A అను వ్యక్తి షాపులో 1375 రూ,

B అను వ్యక్తి షాపులో 850 రూ,

C అను వ్యక్తి షాపులో 1450 రూ. చెల్లించవలెను.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

అయివుండి Ax = B అయినచో x, y లను కనుగొనండి.

సాధన : Ax = B కావునా

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad x+y+z = 3 \ \text{----}(1)$$

$y = 2$ 2

$\Rightarrow \quad x = 2 - y = 1$ ((2) వ సమీకరణం నుంచి)

$= 1$ & $z = 3 - (x+y) = 3 - 2 = 1$ ((1) వ సమీకరణం నుంచి)

$y = 1, \quad z = 1$

6. ఒక ఉత్పత్తిదారుడు తన కంపెనీలో ఉత్పత్తి చేయు P,Q, R అనే వస్తువులను రెండు మార్కెట్లులలో అమ్మెను. వార్షిక అమ్మకాలు క్రింది విధంగా ఉన్నాయి.

మార్కెట్లు యూనిట్లు ఉత్పత్తి

	P	Q	R
I	750	600	525
II	600	200	150

P, Q, R ల ఉత్పత్తి ధరలు వరుసగా 7 Rs, 5 Rs, 3 Rs

P, Q, R ల అమ్మకపు ధరలు వరుసగా 10 Rs, 7 Rs, 5 Rs

అయినచో మాత్రికా గుణకార పద్ధతిలో వారికి వచ్చిన లాభమెంతో తెలియజేయండి.

సాధన : మొదట ఉత్పత్తి ధర మాత్రికను, పిదప అమ్మకపు ధర మాత్రికను కనుగొనెదము. ఈ రెండింటి మధ్య తేడా లాభము మాత్రిక అవుతుంది. ఈ మాత్రిక మూలకాలను కూడగా వచ్చునది మొత్తము లాభము. ఉత్పత్తులను G మాత్రికగా వ్రాసిన

$$G = \begin{bmatrix} 750 & 600 & 525 \\ 600 & 200 & 150 \end{bmatrix}$$

1 యూనిట్‌కు వివిధ వస్తువుల ఉత్పత్తి ధర 'C' మాత్రికగా వ్రాసిన

$$C = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1 యూనిట్‌కు వివిధ వస్తువుల అమ్మకపు ధర 'S' మాత్రికగా వ్రాసిన

$$S = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

GC ఉత్పత్తి వ్యయం మాత్రికగును.

GS అమ్మకం ద్వారా వచ్చిన ఆదాయం మాత్రికగును.

$$GC = \begin{bmatrix} 750 & 600 & 525 \\ 600 & 200 & 150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 750\times7 + 600\times5 + 525\times3 \\ 600\times7 + 200\times5 + 150\times3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5250 + 3000 + 1575 \\ 4200 + 1000 + 450 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9825 \\ 5650 \end{bmatrix}$$

$$GS = \begin{bmatrix} 750 & 600 & 525 \\ 600 & 200 & 150 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 750\times10 + 600\times7 + 525\times5 \\ 600\times10 + 200\times7 + 150\times5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7500 + 4200 + 2725 \\ 6000 + 1400 + 450 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14425 \\ 7150 \end{bmatrix}$$

లాభం మాత్రికగా $GS - GC = \begin{bmatrix} 14425 \\ 7150 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9825 \\ 5650 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4600 \\ 1500 \end{bmatrix}$

ఇక్కడ రెండు మార్కెట్టులలోని లాభం విడివిడిగా వస్తుంది. ఈ మూలకాలను సంకలనము చేయగా మొత్తం లాభం వస్తుంది.
మొత్తం లాభం = 4600 + 1500 = 6100 Rs

7. $A = [2 \;\; 4 \;\; 6]$ $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ అయిన $A^T + B$ మరియు $A + B^T$ లు వ్రాయండి.

$A^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ $A^T + B = \begin{bmatrix} 2+7 \\ 4+4 \\ 6+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$

$A = [2 \;\; 4 \;\; 6]$

$B^T = [7 \;\; 4 \;\; 3]$ $A + B^T = [2 \;\; 4 \;\; 6] + [7 \;\; 4 \;\; 3]$

$= [2+7 \;\; 4+4 \;\; 6+3] = [9 \;\; 8 \;\; 9]$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ అయితే $(A + B)^T = A^T + B^T$ అని చూపించండి.

సాధన : $A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+3 & 3+7 \\ 4+1 & 5+8 & 6+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 10 \\ 5 & 13 & 12 \end{bmatrix}$

$(A + B)^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 13 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$

$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 13 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$ కావున $A^T + B^T = (A + B)^T$

9. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ అయితే AB^T ను కనుక్కోండి.

సాధన : $A . B^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 12 & 0 + 24 \\ 8 + 8 & 0 + 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 24 \\ 16 & 16 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$ అయితే $det\ A$ విలువ వ్రాయండి.

సాధన : $|A| = det\ A = 2.1 - 9.7. = 2 - 63 = -61$

11. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & x \end{bmatrix}$ అయివుండి $|A| = 8$ అయినచో x విలువ వ్రాయండి.

సాధన : $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & x \end{vmatrix} = 8$

$\Rightarrow 3x - 28 = 8 \quad \Rightarrow 3x = 8 + 28 = 36$

$\Rightarrow x = 12$

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ అయితే -1 యొక్క లఘు నిర్ధారకము ఏమిటి ?

సాధన : (-1) యొక్క లఘునిర్ధారకము $= M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 1.0 - 2.7 = -14$

13. $A = \begin{bmatrix} x & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ మరియు $|A| = 21$ అయినచో x విలువ కనుగొనుము.

సాధన : $|A| = \begin{vmatrix} x & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

$= x(-12+4) + (-9+2) + 3(12-8) = -8x - 7 + 12$

$|A|\ 21 \Rightarrow -8x + 5 = 21 \Rightarrow 8x = 5 - 21 = -16$

$\Rightarrow x = -2$

14. $A = \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & & C_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$ అయినచో $|A|$ విలువ వ్రాయండి.

సాధన : $2 \times C_3 = C_1$ అందువలన $C_1 \rightarrow C_1 - 2C_1$ పరిక్రియను చేయగా

అయినచో అని చూపండి.

$$C_1 \to C_1 - 2C_3$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{bmatrix}$ అయినచో $|A| = (a-b)(b-c)(c-a)$ అని చూపండి.

సాధన : $|A| = \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$ $R_2 \to R_2 - R_1$, $R_3 \to R_3 - R_1$ పరిక్రియలు చేయగా

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & ca-bc \\ 0 & c-a & ab-bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & c(a-b) \\ 0 & c-a & b(a-c) \end{vmatrix}$$

రెండవ అడ్డువరుసలో $(b-a)$ ను మూడవ అడ్డువరుసలో $(c-a)$ ను బయటకు వ్రాయవచ్చును.

$$= (b-a)\ (c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & b-c \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 1 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= -(a-b)(c-a)\left[1\begin{vmatrix} 1 & -c \\ 1 & -b \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} 0 & -c \\ 0 & -b \end{vmatrix} + (b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right]$$

$$= (a-b)(c-a)(b-c)$$

16. $A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $|A|$ విలువను విపులీకరించకుండా గణించండి.

సాధన : $|A| = \begin{vmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ ఇక్కడ $R_2 + R_3 = R_1$ అవుతుంది

కావునా $R_1 \to R_2 - (R_2 + R_3)$ పరిక్రియను ప్రయోగిస్తాము.

$$|A| = \begin{vmatrix} 8-(5+3) & 6-(4+2) & 4-(3+1) \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

9. సారాంశము :

1. $A = [aij]_{m\times n}$, $B = [bjk]_{n\times p}$ మాత్రికలయిన

   $AB = [cik]_{m\times p}$ అవుతుంది దనిలో

   $Cik = a_{i1}b_{ik} + a_{i2}b_{i2} + \ldots\ldots\ldots + a_{in}b_{nk}$

2. $A = [aij]_{m\times n}$ మరియు I_m , I_n యూనిట్ మాత్రికలయిన

   $AI_n = A$ మరియు $I_m A = A$

3. A, B గుణకార నియమాన్ని పాటించు మాత్రికలయినా అన్ని వేళలా వినిమయ ధర్మాన్ని పాటించవు. $AB \neq BA$

4. A, B,C గుణకార సహచర్య న్యాయాన్ని పాటిస్తాయి.

   $A(BC) = (AB)C$

5. మాత్రికలు సంకలనముపై మాత్రికా గుణకారము విభాగ న్యాయాన్ని పాటిస్తాయి.

   $(A+B)C = AC + BC$

   $A(B+C) = AB + AC$

6. ఒకే తరగతికి చెందిన A, B మాత్రికలులో

   $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(AB)^T = B^T A^T$, $KA^T = (KA)^T$

7. A ఒక 2×2 మాత్రికయినచో $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ నకు నిర్ధారకము : $[A] = ad - bc$

8. A లో i పంక్తి j దొంతి తీసివేయగా వచ్చు మాత్రిక నిర్ధారకమును మూలకము a_{ij} యొక్క లఘునిర్ధారకము M_{ij} అని అంటారు.

9. M_{ij} ని $(-1)^{i+j}$ తో గుణించగా వచ్చు సంఖ్య a_{ij} యొక్క సహజగుణావయవము. దీనిని A_{ij} తో సూచిస్తారు.

10. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ లో $det\ A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}A_{1n}$ అవుతుంది.

11. $|A| = |A^T|$

12. మాత్రికలో రెండు అడ్డువరుసలు (నిలువు వరుసలు) సమానంగా ఉన్నా లేదా అనుపాతంలో దాని నిర్ధారకము సున్నా అవుతుంది.

13. మాత్రికలో ఒక అడ్డువరున (నిలువ వరస) అంతా సున్న అయితే ఆ మాత్రిక నిర్ధారకము విలువ సున్నా అవుతుంది.

అభ్యాసములు

(1) నిర్ధారకము విలువలు వ్రాయండి.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 9 & 8 & 7 \\ 19 & 14 & 9 \end{bmatrix}$

ans : (a) 6 (b) -1 (c) 0

2. $\begin{bmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{bmatrix} = 0$ అని చూపండి.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ లో 1, 6, 5, లఘు నిర్ధారకములు కనుగొనండి మరియు $|A|$ విలువ వ్రాయండి.

Ans :1 లఘు నిర్ధారకము - 48

6 లఘు నిర్ధారకము - 14

5 లఘు నిర్ధారకము - 16 $det\ A = |A| = -32$

4. $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ అయిన -2, -1, 3 ల సహగుణావయవములు, వ్రాసి $det\ A$ ను కనుగొనండి.

Ans : -2 యొక్క సహగుణావయవము = -8

-1 యొక్క సహగుణావయవము = +7

3 యొక్క సహగుణావయవము = 4

మరియు $|A| = 2$

పాఠం - 16

మాత్రికలు - III

ఈ పాఠ్యాంశములో నిర్ధారకములనుపయోగించి అనుబంధ మాత్రికలు, విలోమ మాత్రికలు కనుగొని వాటినుపయోగించి సమీకరణ సాధన చేస్తాము.

1) ఉపోద్ఘాతము
2) సాధారణ మాత్రిక
   ఎ) అసాధారణ మాత్రిక
3) అనుబంధ మాత్రిక
4) విలోమ మాత్రిక
   ఎ) విలోమ మాత్రిక లక్షణాలు
5) విలోమ మాత్రిక పద్ధతి
6) క్రేమర్ సూత్రము
7) మాదిరి సమస్యలు
8) సారాంశము
9) అభ్యాసములు

అనుబంధ మాత్రికలు విలోమ మాత్రికలు

1. ఉపోద్ఘాతము

మాత్రికలలో సంకలము, భేదము మరియు గుణాకారము సాధ్యము కానీ ఒక మాత్రికను మరొక మాత్రికతో భాగించుటను ప్రక్రియ జరుగదు. ఒక మాత్రికను వేరొక మాత్రికతో గుణించిన లబ్దము ఒక యూనిట్ మాత్రికగుట జరుగును. ఈ పరిక్రియ నుండి మాత్రిక యొక్క విలోమమును నిర్వచింతుము.

ఈ విలోమ మాత్రిక చలరాశులు ఎక్కువగా ఉండే సమీకరణాలను సాధించుటలో ఉపయోగపడుతుంది. విలోమ మాత్రిక పరిక్రియ వనరుత్పత్తి విశ్లేషణ మరియు ప్రతిగమన విశ్లేషణలో ఇంకా పునరావృత సమీకరణములను సాధించుటలోనూ బాగా ఉపయోగపడుతుంది.

2. సాధారణ మాత్రిక

చతురస్ర మాత్రిక యొక్క నిర్ధారకము శూన్యము కానపుడు ఆ మాత్రికను సాధారణ మాత్రికని అంటారు.

ఉదా : $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$; $|A| = 2.3 - 0.4 = 6 \neq 0$

కావునా ఇది సాధారణ మాత్రిక.

ఎ) అసాధారణ మాత్రిక :

చతురస్ర మాత్రికలో నిర్ధారకము విలువ సున్నా అయితే దానిని అసాధారణ మాత్రికని అంటారు.

ఉదా : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 12 & 18 \\ 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 12 & 18 \\ 13 & 14 & 15 \end{vmatrix}$ ఇక్కడ $R_2 = 6R_1$ నిర్ధారక ధర్మాలననుసరించి $|A| = 0$

కావున ఇది అసాధారణ మాత్రిక

3. అనుబంధ మాత్రిక

చతురస్ర మాత్రిక 'A' లోని మూలకాలకు బదులుగా వాటి సహగుణావయవములను వ్రాసి వచ్చిన మాత్రికను వ్యత్యయము చేయగా ఏర్పడు మాత్రికను A యొక్క అనుబంధ మాత్రికని అంటారు.

దీనిని Adj A అని సూచిస్తాము.

* 2 × 2 మాత్రికను అనుబంధ మాత్రిక వ్రాయవలెనన్న ప్రధాన వికర్ణములోని మూలకాలను పరస్పరం మార్చి వ్రాసెదము. ఇంకా మిగిలిన రెండు మూలకాలకు ముందు " - " గుర్తు జోడిస్తాము.

* Adj (AB) = Adj B. Adj A.

* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ అయితే $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$ అవుతుంది.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ అయితే

మూలకాలకు బదులుగా వాటి సహగుణావయవములు వ్రాయగా

మాత్రిక $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ ఈ మాత్రికను వ్యత్యయము చేయగా

వచ్చునది $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$

ఉదా : 1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ అయినచో

$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ అ...

౨) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ అయినచో

$A_{11} = a_{11}$ సహగుణావయవము $= (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -5$

$A_{12} = a_{12}$ సహగుణావయవము $= (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -6$

$A_{13} = a_{13}$ సహగుణావయవము $= (-1)^{1+3} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1$

$A_{21} = a_{21}$ సహగుణావయవము $= (-1)^{2+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$

$A_{22} = a_{22}$ సహగుణావయవము $= (-1)^{2+2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$

$A_{23} = a_{23}$ సహగుణావయవము $= (-1)^{2+3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1$

$A_{31} = a_{31}$ సహగుణావయవము $= (-1)^{3+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = 0$

$A_{32} = a_{32}$ సహగుణావయవము $(-1)^{3+2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = -8$

$A_{33} = a_{33}$ సహగుణావయవము $(-1)^{3+3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 3$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & -8 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

4. విలోమ మాత్రిక :

A అను మాత్రికకు అనుగుణంగా B అను మాత్రిక $AB = BA = I$ అగునట్లు వ్యవస్థితమైతే B ని A యొక్క విలోమ మాత్రికని అంటాము. దీనిని A^{-1} సూచిస్తాము.

ఎ) విలోమ మాత్రికా లక్షణాలు

సిద్ధాంతము 1 : ఏదయినా చతురస్ర మాత్రికకు విలోమము వ్యవస్థితమైతే అది ఏకైకము.

సిద్ధాంతము 2 : మాత్రికకు విలోమ మాత్రిక వ్యవస్థితమవ్వాలంటే అది సాధారణ మాత్రిక యగుట అవశ్యము.

సిద్ధాంతము 3 : A ఒక సాధారణ మాత్రికయినచో

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj } A) \text{ లేక } (\text{Adj } A)\, A = |A|\, I_n = A\,(\text{Adj } A)$$

ఉదా : 1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

det A $= 2.5 - 3.7 = -11 \neq 0$

$\Rightarrow$ A ఒక సాధారణ మాత్రిక

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \quad \therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\text{Adj } A = \frac{-1}{11}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A.\,A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\frac{-1}{11}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \frac{-1}{11}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2.5 + 3.(-7) & 2.(-3) + 3.2 \\ 7.5 + 5.(-7) & 7.(-3) + 5.2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 10 - 21 & -6 + 6 \\ 35 - 35 & -21 + 10 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

2 $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ det $A = |A| = 1\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$= 3 - 8 = -5 \neq 0$ $\quad$ A ఒక సాధారణ మాత్రిక.

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -5 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -6$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = 0 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = -8$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = 3$

$$\therefore \text{Adj } A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & -8 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \quad \text{Adj } A = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & -8 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

* $\text{Adj } A = |A|.\ A^{-1}$

* I_n స్వయం విలోమము అనగా $I_n\ I_n = I_n$

సిద్ధాంతము 4 : A ఒక సాధారణ మాత్రికయిన

$$\left[A^{T}\right]^{-1} = \left[A^{-1}\right]^{T}$$

సిద్ధాంతము 5 : A, B లు ఒకే తరగతికి చెందిన చతురస్ర మాత్రికలయినపుడు $(AB)^{-1} = B^{-1}\ A^{-1}$ అవుతుంది.

సిద్ధాంతము 6 : $A_1,\ A_2 \ldots\ldots A_n$ లు ఒకే తరగతికి చెందిన చతురస్ర మాత్రికలయిన

$$(A_1,\ A_2 \ldots\ldots A_n)^{-1} = A_n^{-1},\ A_{n-1}^{-1} \ldots\ldots A_2^{-1}\ A_1^{-1}$$

బుజ సమీకరణాలను మాత్రికలుగా వ్రాయుట :

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y + a_3z &= b_1 \\ c_1x + c_2y + c_3z &= b_2 \\ d_1x + d_2y + d_3z &= b_3 \end{aligned}$$

ఇది బుజు సమీకరణాలు వీటిలో x, y, z చలరాశులని పిలుస్తారు.

$a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots d_1, d_2, d_3$ లు చలరాశుల గుణకములు, చలరాశుల గుణకములను మాత్రికగా వ్రాసిన

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}$$ చలరాశులను X మాత్రికగా, కుడివైపు మూలకాలను B మాత్రికగా వ్రాసినచో

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$ అయితే ఇచ్చిన సమీకరణములను ఒకే మాత్రికా సమీకరణముగా $AX = B$ అని వ్రాయవచ్చును.

ఉదా :
$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 3y + 7z &= 4 \\ x + 2y + 3z &= 5 \end{aligned}$$ అయితే

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ మరియు $$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$ అయి $AX = B$ అవుతుంది.

దీనిని సాధించుటలో మనమిపుడు రెండు పద్ధతులు పరిశీలించెదము.

5) విలోమ మాత్రిక పద్ధతి :

A యొక్క విలోమ మాత్రిక A^{-1} ను కనుగొని దానిని మాత్రికా సమీకరణము $AX = B$ ఎడమవైపు గుణకారము చేయగా

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

ఈ విధంగా చలరాశులను సులభంగా కనుగొనగలము.

* ఈ పద్ధతిలో సమీకరణములు సాధించవలెనన్న గుణకముల మాత్రిక A సాధారణ మాత్రికగుట అవశ్యము.

ఉదా : $x + 2y + 2z = 5$

$2x + y + 2z = 5$

$2x + 2y + z = 5$ విలోమ మాత్రిక పద్ధతిలో సాధించుము.

సాధన : $AX = B$ రూపంగా వ్రాసిన

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\det A = |A| = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -3 + 4 + 4 = 5 \neq 0$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -15+10+10 \\ 10-15+10 \\ 10+10-15 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ అనురూప మూలకాలను వ్రాయగా

$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1$

2) $\begin{aligned} x + 4y &= 6 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$ విలోమ పద్ధతిలో సాధించుము.

సాధన : $AX = B$ రూపంలో వ్రాయగా

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad |A| = 1.(-1) - 4.1 \; -5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ Adj } A = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6+4 \\ 6-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6+4 \\ 6-1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 2 \;\&\; y = 1$$

6. క్రామర్స్ సూత్రము

$x_1, \; x_2, \; x_3$ అను చలరాశులతో ఏకఘాత సమీకరణములు

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_{11}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_{21}$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_{31}$$

వీటిని మాత్రికలుగా వ్రాయగా

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \end{array}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$$

మొదటిగా $|A|$ కనుగొనిన $|A| \neq 0$ అయినపుడు $|A| = \Delta$ అని అంటారు.

A మాత్రికలో మొదటి నిలువు వరుస c_1 ను తొలగించి ఆస్థానంలో B ని ఉంచి వచ్చిన మాత్రికకు నిర్ధారకము కనుగొనెదము.

దీనిని Δ_1 అని పిలిచెదరు.

అనగా $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \overset{*}{b_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ఇదే విధంగా A మాత్రికలో రెండవ నిలువు వరుస c_2ను తొలగించి అక్కడ B ని ఉంచి వచ్చిన మాత్రికకు నిర్ధారకము కనుగొనెదము. దీనిని Δ_2 అని పిలిచెదరు.

అనగా $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_{21} & a_{23} \\ a_{31} & b_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

అలాగే $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} \\ a_{31} & a_{32} & b_{31} \end{vmatrix}$

ఇపుడు $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$ విలువలు కనుగొనెదము.

ఉదా : $x + y = 4$

$x - y = 2$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \neq x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$|A| = -2 \neq 0 \Rightarrow \Delta = -2$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ (C_1 బదులు B)

$= -4 - 2 = -6$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ (C_2 బదులు B)

$= 2 - 4 = -2$

ఇపుడు $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-6}{-2} = 3;\ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-2}{-2} = 1$

$\Rightarrow$ చలరాశుల విలువలు $x = 3$ & $y = 1$

* క్రామర్స్ సూత్రము ద్వారా సమీకరణములను సాధించవలెనన్న చలరాశుల గుణకముల మాత్రిక సాధారణ మాత్రికయి వుండవలెను. $|A| \neq 0$

7) మాదిరి సమస్యలు

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ ఒక అసాధారణ మాత్రికయితే x విలువ ఎంత?

సాధన : $|A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & x \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 14 - 3x = 0$

$\Rightarrow 3x = 14 \Rightarrow x \frac{14}{3}$

) A $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & x & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ ఒక అసాధారణ మాత్రిక కావాలంటే x కు ఎంత విలువనిత్తురు?

సాధన : $|A| = 0$ అనగా

$1(x.7 - 4.5) - 3(2.7 - 4.3) + 3(2.5 - x.3) = 0$

$7x - 9x - 20 \quad 4 + 30 = 0 \Rightarrow -2x + 6 = 0$

$x = 3$

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ అయిన A యొక్క అనుబంధ మాత్రిక వ్రాయండి.

$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & x & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ అయితే A^{-1} కనుగొనండి

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 8 - 3 = 3 \neq 0$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 6 - 8 = -2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 4$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = -1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = 7$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = -2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = -1$$

$$\therefore \text{Adj } A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \quad \text{Adj } A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

5) ఒక సేల్స్‌మెన్ 3 నెలలో చేసిన 3రకాల వస్తువుల తాలూకు అమ్మకాలు ఈ క్రింది విధంగా ఉన్నాయి. వాటిపై కమీషను కూడా వేరువేరుగా ఉన్నాయి.

	నెలలు	అమ్మకాలు			కమీషను
		x,	y,	z	
పట్టిక	1	9	10	2	350
	2	15	5	4	415
	3	6	10	3	300

క్రామర్స్ పద్ధతిలో x, y, z అమ్మకాలపై కమీషను ఎంతో విడివిడిగా లెక్కించండి.

సాధన : x_1, x_2, x_3 లు x, y, z అను వస్తువులపై కమీషన్లు అనుకొనిన

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 2 \\ 15 & 5 & 4 \\ 6 & 10 & 3 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 350 \\ 415 \\ 300 \end{bmatrix}$$

ఇచ్చిన దత్తాంశము మాత్రికా సమీకరణం AX = B గా వ్రాయవచ్చును. క్రామర్ సూత్రము కొఱకు

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 9 & 10 & 2 \\ 15 & 5 & 4 \\ 6 & 10 & 3 \end{vmatrix} = -195$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 350 & 10 & 2 \\ 415 & 5 & 4 \\ 300 & 10 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 350\,(15 - 40) - 10\,(1245 - 1200) + 2(450 - 1500) = -3800$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 9 & 350 & 2 \\ 15 & 415 & 4 \\ 6 & 300 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 9\ (1245 - 1200) - 350\ (45 - 24) + 2(4500 - 2490) = -2925$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 9 & 10 & 350 \\ 15 & 5 & 415 \\ 6 & 10 & 300 \end{vmatrix}$$

$= 9\ (1500 - 4150) - 10\ (4500 - 2490) + 350(150$ [illegible] $30)$ [illegible] 950

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3800}{-195} = 20$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2925}{-195} = 15$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-1950}{-195} = 10$$

x పై కమీషను $x_1 = 20$ Rs

y పై కమీషను $x_2 = 15$ Rs

z పై కమీషను $x_3 = 10$ Rs   ఒక వస్తువుపై కమీషను గుణించినాము.

8. సారాంశము

1) నిర్ధారకము శూన్యమయిన మాత్రికను అసాధరణ మాత్రికని మరియు నిర్ధారకము శూన్యేతర సంఖ్య అయిన మాత్రికను సాధారణ మాత్రికని అంటారు.

2) చతురస్ర మాత్రికలోని మూలకాలకు బదులు సహగుణావయవాలు వ్రాసి వచ్చిన మాత్రికను వ్యత్యయము చేయగా ఏర్పడు మాత్రికను ఇచ్చిన మాత్రికకు అనుబంధ మాత్రికని అంటారు.

3) A యొక్క విలోమ మాత్రిక $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A$ ఇక్కడ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ అవుతుంది.

4) ఇచ్చిన ఋజు సమీకరణాలు మాత్రికల ద్వారా సాధించవలెనన్న ముందుగా వాటిని $AX = B$ మాత్రికా సమీకరణం రూపంగా వ్రాసెదరు.

5) మాత్రికా విలోమ పద్ధతిలో A^{-1} కనుగొని $X = A^{-1}B$ అని రాసి X = చలరాశుల విలువలు కనుగొనెదము.

6) క్రామర్సు సూత్రము ద్వారా కనుగొనుటకు $\Delta = \det A = |A|$ రాసెదము.

Δ_1 = A లో C_1 బదులు B రాసిన మాత్రిక నిర్ధారకము

Δ_2 = A లో C_2 బదులు B రాసిన మాత్రిక నిర్ధారకము

$\vdots$

Δ_n = A లో C_n బదులు B రాసిన మాత్రిక నిర్ధారకము కనుగొనెదము.

తరువాత $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ ....$x_n = \frac{\Delta_n}{\Lambda}$ చలరాశులు విలువలు కనుగొనెదము.

అభ్యాసములు

1) Adj A వ్రాయండి

(a) $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

Ans: (a) $\begin{bmatrix} d_1 & -b_1 \\ -c_1 & a_1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

2) విలోమ మాత్రికలు వ్రాయండి.

a) $A = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Ans : a) $-\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 & -8 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{a_1d_1 - b_1c_1}\begin{pmatrix} d_1 & -b_1 \\ -c_1 & a_1 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 & 2 & -16 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

3) విలోమ మాత్రికా పద్ధతిలో సమీకరణాలను సాధించండి.

a) $x + y + z = 6$, $x - y + z = 2$, $2x + y - z = 1$

b) $4x + y = 6$, $3y + 4z = 5$, $5x + 3z = 2$

c) $x + y = 0$, $x - 3y = 4$

d) $2x + 3y = 2$, $4x - y = 3$

Ans :

a) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ b) $x = 1$, $y = 3$, $z = -1$ c) $x = 1$, $y = -1$ d) $x = -\frac{1}{2}$, $y = 1$

4) క్రేమర్ సూత్రమునుపయోగించి సమీకరణాలను సాధించండి.

a) $2x - 3y = 5$, $7x - y = 8$

b) $2x + 3y = 7$, $3x + 5y = 8$

c) $$\begin{aligned} 5x - 2y - 3z &= 17 \\ 3x - y + z &= 15 \\ x + y - 6z &= 13 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x + 6y - z &= 10 \\ 2x + 3y + 3z &= 17 \\ 3x - 3y - 2z &= 9 \end{aligned}$$

Ans :

a) $\Delta = 19$, $\Delta_1 = 19$, $\Delta_2 = -19$; $x = 1$, $y = 1$

b) $\Delta = 1$, $\Delta_1 = 8$, $\Delta_2 = -3$; $x = 8$, $y = -3$

c) $\Delta = -25$, $\Delta_1 = -75$, $\Delta_2 = 100$, $\Delta_3 = -50$ $x = 3$, $y = -4$, $z = 2$

d) $\Delta = 96$, $\Delta_1 = 96$, $\Delta_2 = 192$, $\Delta_3 = 288$ $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$